

Université Paris II Ponthéon-ASSAS
DROIT-ÉCONOMIE-SCIENCES SOCIALES

THÈSE

pour l'obtention du grade de Docteur en Sciences Economiques
de l'Université Paris II Assas
présentée et soutenue publiquement par:

Haykel Hamdi

le 04 mars 2011

**THÉORIE DES OPTIONS ET FONCTIONS
D'UTILITÉ : STRATEGIES DE
COUVERTURE EN PRESENCE DES
FLUCTUATIONS NON GAUSSIENNES**

JURY :

Mme Albizzati Marie-Odile (examineur),	Maître de Conférences HDR, Paris II Ponthéon-ASSAS
M. Chaker Aloui (rapporteur),	Maître de Conférences HDR, Université Manouba, Tunisie
Mme Valérie Mignon (rapporteur),	Professeur à l'Université Paris Ouest-Nanterre La Défense
M. Bertrand Lemennicier (directeur),	Professeur à l'Université Paris II Ponthéon-ASSAS

à mes parents ...
à mon grand frère Chokri ...
à ma femme Hajer et à mon future bébé...
à mes frères et mes soeurs ...

Remerciements

Mes pensées vont tout d'abord à mes chers parents qui, par leur soutien et réconfort, ont contribué à l'aboutissement de ce travail de longue haleine. Je leur exprime toute mon affection et gratitude et leur dédit ce succès qui est aussi le leur.

Je tiens à exprimer ma gratitude à Monsieur Bertrand Lemennicier pour son soutien, ses conseils avisés et sa disponibilité qui ont contribué à la réalisation de cette thèse. Son encadrement a favorisé le développement de mes compétences et de mon goût pour la recherche. Je salue également sa souplesse et son ouverture d'esprit qui ont su me laisser une large marge de liberté pour mener à bien ce travail de recherche.

Je remercie très chaleureusement les Professeurs Chaker Aloui et Valérie Mégnon pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse.

Je remercie également le professeur Albizzati Marie-Odile de m'avoir fait l'honneur de faire partie de ce jury de thèse.

Une pensée particulière est adressée à Monsieur Farhat Selmi qui m'a soutenu dans mon projet de doctorat et à contribuer à l'émergence de ce sujet de thèse, au cours de mon année de DEA à Paris II.

Un grand remerciement à ma femme Hajer ben Joud qui a su me soutenir pendant les moments difficiles en me faisant profiter de sa bonne humeur et aussi de ses

encouragements.

L'occasion m'est donnée ici de remercier tous les thésards de Paris II. Je remercie enfin toutes les personnes qui m'ont témoigné de la sympathie et de la bienveillance au cours de mes quatre années de thèse. Je pense particulièrement à ma famille proche et mes amis.

Enfin, je dédie cette thèse à ma famille qui, depuis de longues années, a su m'encourager dans mes choix et, sans qui, je ne serais pas devenu ce que je suis.

Hamdi Haykel

L'Université de Paris II Ponthéon ASSAS n'entend donner aucune approbation ni improbation aux opinions émises dans cette thèse. Ces opinions doivent être considérées comme propres à leur auteur.

Table des matières

Remerciements	2
Table des figures	12
Liste des tableaux	16
Liste des symboles	18
INTRODUCTION GÉNÉRALE	22
I LES MESURES DE RISQUE DANS UN CADRE NON GAUS- SIEN : UNE MESURE DÉDUITE DE LA FONCTION D'UTI- LITÉ	32
1 LES MESURES DE RISQUE DANS UN CADRE NON GAUS- SIEN : UNE MESURE DÉDUITE DE LA FONCTION D'UTI- LITÉ	33
1.1 Introduction	34
1.2 Les principaux risques financiers	38
1.2.1 Les risques non financiers	38
1.2.1.1 Risques opérationnels	38
1.2.1.2 Risques stratégiques	39
1.2.2 Les risques financiers	40

1.2.2.1	Risques de crédit	40
1.2.2.2	Risques d'illiquidité	41
1.2.2.3	Risques de prix	42
1.3	Les mesures de risque traditionnelles	44
1.3.1	L'approche moyenne-variance	44
1.3.2	Une VaR statique : VaR empirique, VaR Variance-Covariance et VaR RiskMetrics	46
1.3.3	Une mesure de la VaR fondée sur les moments d'ordres élevés	48
1.3.4	Adéquation de la queue de distribution avec une GPD, VaR_{GPD} et l'Expected Shortfall (VaR conditionnelle)	51
1.3.4.1	Adéquation de la queue de distribution avec une GPD et estimation de la VaR	51
1.3.4.2	L'Expected Shortfall (VaR conditionnelle)	52
1.4	Une mesure du risque déduite de la fonction d'utilité	58
1.4.1	L'approche de l'utilité espérée	58
1.4.1.1	Présentation de l'approche	58
1.4.1.2	Justifications de l'approche de l'utilité espérée	60
1.4.2	Les mesures du risque et les fonctions d'utilité	63
1.4.2.1	Une mesure du risque au sens de Jia et Dyer (1996)	63
1.4.2.2	La maximisation de l'utilité espérée conduit-elle à une mesure du risque?	67
1.4.3	Application des mesures du risque fondée sur la fonction d'uti- lité aux indices boursiers	73
1.4.3.1	La mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité exponentielle négative	74
1.4.3.2	Une mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité isoélastique	77
1.4.3.3	Une mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité Hyperbolique	79
1.5	Conclusion	83
	Bibliographie	85

2.4.3	Comparaison des méthodes	124
2.4.3.1	La méthode de noyau (Kernel)	124
2.4.3.2	L'arbre binomial implicite	127
2.4.3.3	Comparaison des méthodes paramétriques et semi- paramétriques	129
2.5	Conclusion	133
Bibliographie		135
Appendices		139
B.1	Les Figures	140
B.1.1	Le modèle de Black et Scholes (1973)	140
B.1.2	Le modèle de polynôme de hermite	141
B.1.3	Le modèle d'expansion d'Edgeworth	143
B.1.4	Le modèle de mélange de lois log-normales	144
B.1.5	Le modèle à sauts	146
B.2	Les Tableaux	148
3	L'ESTIMATION DE LA FONCTION D'AVERSION AU RISQUE	154
3.1	Introduction	155
3.2	La fonction d'aversion au risque implicite	156
3.3	La fonction d'aversion au risque dans le cadre du modèle de Black- Scholes (1973)	159
3.4	L'estimation implicite de l'aversion au risque	161
3.4.1	L'estimation de la densité neutre au risque	161
3.4.2	L'estimation de la densité subjective	161
3.4.3	Résultats empiriques	163
3.5	Conclusion	169
Bibliographie		170
Appendices		175
C.1	Les DNR par le modèle à saut et le mélange de log-normales, et la densité subjective	176

C.2	La fonction d'aversion au risque estimée par un mélange de lois log-normales et un modèle à sauts	179
-----	---	-----

III STRATÉGIE DE COUVERTURE OPTIMALE ET RISQUE MINIMAL : STRATÉGIE DE COUVERTURE ET LES FONCTIONS D'UTILITÉS **182**

4 STRATÉGIE DE COUVERTURE OPTIMALE ET RISQUE MINIMAL : STRATÉGIE DE COUVERTURE ET LES FONCTIONS D'UTILITÉS **183**

4.1	Introduction	184
4.2	Stratégie de couverture en delta Δ de Black-Scholes (1973) et le risque zéro	186
4.2.1	Stratégie <i>stop-loss</i>	186
4.2.2	Le modèle de Black-Scholes et la couverture en delta	188
4.3	Le cadre général	191
4.3.1	Bilan financier global	191
4.3.2	Portefeuille d'options	193
4.3.3	Les hypothèses de base	194
4.4	Stratégie de couverture statique	196
4.4.1	Les moments d'ordre partiel et les stratégies de couverture	196
4.4.1.1	La minimisation de moment d'ordre deux : la variance	196
4.4.1.2	La minimisation de moments d'ordre quatre	199
4.4.2	Les stratégies de couverture et les fonctions d'utilités	201
4.4.2.1	Le ratio de couverture optimal déduit de la fonction d'utilité exponentielle négative	201
4.4.2.2	Le ratio de couverture optimal déduit de la fonction d'utilité isoélastique	207
4.5	La stratégie de couverture dynamique et la stratégie de couverture statique translatée	215
4.5.1	La stratégie de couverture statique translatée	215

4.5.2	La stratégie de couverture dynamique	220
4.6	conclusion	235
	Bibliographie	237
	CONCLUSION GÉNÉRALE	239
	BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE	243

Table des figures

2.1	Estimation des queues de distribution des indices boursiers	55
2.2	La variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité exponentielle négative en fonction du paramètre β	76
2.3	La variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité isoélastique en fonction du paramètre γ	78
2.4	La variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité en fonction de α pour des différentes valeurs de γ et β	81
2.5	La variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité en fonction de γ pour des différentes valeurs de α et β	82
2.6	La variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité en fonction de β pour des différentes valeurs de α et β	83
3.1	L'évaluation de l'indice CAC 40 pour la période du 01/01/2007 au 31/12/2007 .	120
3.2	Surface de la Volatilité Implicite observée sur options sur indice le 10/01/2007 .	122
3.3	Smile de volatilité sur les option CAC 40 pour la date 10/01/2007 d'échéance respectivement 20 jours, 50 jours et 80 jours.	123
3.4	Smile de volatilité sur les option CAC 40 pour la date 10/01/2007 d'échéance respectivement 20 jours, 50 jours et 80 jours selon la méthode de Aït-Sahlia et Lo (2000).	126
3.5	La densité neutre au risque $q(x_T)$ du CAC 40 avec la méthode de kernel pour la date 10/01/2007 d'échéance 3 mois.	127

3.6	La densité neutre au risque avec l'arbre implicite de Jackwerth et Rubinstein (1996) pour les différentes dates et maturités	129
3.7	Les densités neutre au risque avec le modèle de Black & Scholes pour les différentes dates et maturités	141
3.8	Les densités neutre au risque avec le modèle d'Hermite pour les différentes dates et maturités	142
3.9	Les densités neutre au risque avec le modèle d'expansion d'Edgeworth pour les différentes dates et maturités	144
3.10	Les densités neutre au risque avec le modèle de mélange de lois log-normales pour les différentes dates et maturités	145
3.11	Les densités neutre au risque avec le modèle à sauts pour les différentes dates et maturités	147
4.1	Fonctions d'aversion au risque en pré-crise (10 Janvier 2007) pour différentes échéances (20, 50 et 80 jours). ¹	166
4.2	Densités Neutre au Risque avec un modèle à sauts et un mélange de lois log-normales et la densité Subjective pour la date 10/07/2007 pour les maturités 20 jours, 50 jours et 80 jours.	177
4.3	Densités Neutre au Risque avec un modèle à sauts et un mélange de lois log-normales et la densité Subjective pour la date 17/10/2007 pour les maturités 13 jours, 43 jours et 73 jours.	178
4.4	La fonction d'aversion au risque avec un modèle à sauts et un mélange de lois log-normales et un modèle à saut pour la date 10/07/2007 pour les maturités 20 jours, 50 jours et 80 jours	180
4.5	La fonctions d'Aversion au risque avec un modèle à sauts et avec un mélange de lois log-normales pour la date 17/10/2007 pour les maturités 13 jours, 43 jours et 73 jours	181
5.1	Risque quadratique en fonction de stratégie de couverture ϕ dans le cas simple où cette stratégie est fixé dans le temps. \mathcal{R} est minimal pour une valeur bien déterminée de ϕ	197

5.2	Les stratégies de couverture qui maximisent la fonction d'utilité exponentielle négative. L'option émise est de maturité 20 jours et de prix d'exercice 5500. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 10%. Le choix de β est basé sur nos résultats empiriques trouvés au chapitre 3.	203
5.3	Les stratégies de couverture qui maximisent la fonction d'utilité exponentielle négative. L'option émise est de maturité 20 jours et de prix d'exercice 5500. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 12% et 16%.	204
5.4	Les stratégies de couverture qui maximisent la fonction d'utilité exponentielle négative. L'option émise est de prix d'exercice 5500. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 12% et pour deux exemples de maturités $T = 20$ jours et $T = 50$ jours.	205
5.5	Les stratégies de couverture optimales en fonction de cours du sous-jacent : ϕ_{BS}^* le delta de Black-Scholes, ϕ_2^* minimise la variance de bilan financier, ϕ_4^* minimise le moment d'ordre quatre du bilan financier et ϕ_β^* qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative. L'option émise est de maturité 20 jours et de prix d'exercice 5500. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 12%.	206
5.6	Les différentes Gamma (Γ) correspondantes aux quatre stratégies optimales : ϕ_{BS}^* , ϕ_2^* , ϕ_4^* et ϕ_β^* . Γ est la dérivée première de ϕ^* par rapport au sous-jacent	207
5.7	Les stratégies de couverture qui maximisent la fonction d'utilité isoélastique. L'option émise est de maturité 20 jours, de prix d'exercice 5500 et de prime 55,36. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 10%. Le choix de γ est basé sur nos résultats empiriques trouvés au chapitre 3.	209
5.8	Les stratégies de couverture qui maximisent la fonction d'utilité isoélastique. L'option émise est de maturité 20 jours, de prix d'exercice 5500, de prime 55,36. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 12% et 16%.	211

5.9	Les stratégies de couverture qui maximisent la fonction d'utilité isoélastique. L'option émise est de maturité 20 jours, de prix d'exercice 5500 et de prime 55,36. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 12% et pour deux exemples de maturités $T = 20$ jours et $T = 50$ jours. . .	212
5.10	Les stratégies de couverture optimales en fonction de cours du sous-jacent : ϕ_{BS}^* le delta de Black-Scholes, ϕ_2^* minimise la variance de bilan financier, ϕ_4^* minimise le moment d'ordre quatre du bilan financier, ϕ_β^* qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative et ϕ_γ^* qui maximise la fonction d'utilité isoélastique. L'option émise est de maturité 20 jours, de prix d'exercice 5500 et de prime 55,36. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 12%.	213
5.11	Les différentes Gamma (Γ) correspondantes aux quatre stratégies optimales : ϕ_{BS}^* , ϕ_2^* , ϕ_4^* , ϕ_β^* et ϕ_γ^* . Γ est la dérivée première de ϕ^* par rapport au sous-jacent . . .	214
5.12	L'évolution au cours de temps de cinq stratégies de couverture optimales en fonction de cours du sous-jacent : ϕ_{BS}^* , ϕ_2^* , ϕ_4^* , ϕ_β^* et ϕ_γ^* . L'option émise est de maturité mois (d'échéance fin janvier), de prix d'exercice 5500 et de prime 52,43. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative.	217
5.13	L'évolution au cours de temps de cinq stratégies de couverture optimales en fonction de cours du sous-jacent : ϕ_{BS}^* , ϕ_2^* , ϕ_4^* , ϕ_β^* et ϕ_γ^* . L'option émise est de maturité mois (d'échéance fin octobre), de prix d'exercice 5750 et de prime 90,28. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative.	218
5.14	Les frais de transactions payés à chaque intervalle de réajustement associés aux trajectoires des cinq stratégies rapportées sur la Figure 5.12. Le taux de pourcentage des frais de transactions est de 0.25%.	219
5.15	Les frais de transactions payés à chaque intervalle de réajustement associés aux trajectoires des cinq stratégies rapportées sur la figure 5.13. Le taux de pourcentage des frais de transactions est de 0.25%.	219

Liste des tableaux

2-1	Statistiques descriptives des rendements des indices	45
2-2	VaR empirique(VaR_{emp}), VaR Variance-Covariance (VaR_{V-C}), VaR RiskMetrics (VaR_{RM})	48
2-3	VaR fondée sur les moments d'ordre élevés VaR_M	50
2-4	Estimation GPD, VaR_{GPD} et ES, seuil 5%	56
2-5	Estimation GPD , VaR_{GPD} et ES, seuil 1%	56
2-6	Un tableau récapitulatif de nos résultats théoriques	74
2-7	Les différentes valeurs de l'aversion au risque dans le littérature	75
2-8	Calcul de mesures de risque fondée sur une fonction d'utilité expo- nentielle négative pour différentes valeurs de β	75
2-9	Calcul de mesures de risque fondée sur une fonction d'utilité isoélastique pour différentes valeurs de γ	77
2-10	Calcul de mesures de risque fondée sur une fonction d'utilité exponentielle négative pour différentes valeurs de β	78
2-11	La variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité HARA pour des valeurs particulières de β and γ	79
3-1	Les valeurs de la bandwidth pour les différents régresseurs	125
3-2	Paramètres du modèle de Black-Scholes estimés sur CAC 40	148
3-3	Paramètres du modèle de mélange de lois log-normales estimés sur CAC 40	148
3-4	Paramètres du modèle des polynômes de Hermite estimés sur CAC 40	149

3-5	Paramètres du modèle d'Edgeworth estimés sur CAC 40	149
3-6	Paramètres du modèle à sauts estimés sur CAC 40	150
3-7	Paramètres du modèle d'Heston estimés sur CAC 40	150
3-8	L'écart-type implicite	151
3-9	Skewness implicites	151
3-10	Kurtosis implicites	152
3-11	MSE	152
3-12	ARE (10^4)	153

Liste des symboles

- A_a : fonction d'aversion au risque absolue.
- A_r : fonction d'aversion au risque relatif.
- c_n : cumulant d'ordre n .
- C : Le prix d'une option d'achat.
- \hat{C} : prix du marché d'une option d'achat.
- C^{BS} : prix du marché d'une option d'achat dans la théorie de Black-Scholes.
- C^{ln} : prix d'une option d'achat dans le cadre d'un mélange de distribution log-normales.
- C^{her} : prix d'une option d'achat dans le cadre d'un expansion d'Hermite.
- C^{edg} : prix d'une option d'achat dans le cadre d'un expansion d'Edgeworth.
- C^{ker} : prix d'une option d'achat avec la méthode de noyau *kernel*.
- C^{saut} : prix d'une option d'achat dans le cadre d'un modèle avec sauts.
- C^{hes} : prix d'une option d'achat dans le cadre d'un modèle d'Heston.
- $D\tau$: variance des fluctuations sur l'intervalle de temps.
- δ_{ij} : delta de Kroeneker : $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, 0 sinon.
- Δ : dérivée du prix de l'option par rapport à la valeur du sous-jacent, $\Delta = \partial C / \partial x_0$, qui est aussi la stratégie de couverture optimale ϕ^* dans le modèle de Black-Scholes.
- F : prix d'un contrat à terme.
- ϕ_k : nombre de sous-jacent dans le portefeuille à l'instant k .
- ϕ_k^* : stratégie de couverture optimale.
- ϕ_2^* : stratégie de couverture optimale qui minimise le moment d'ordre deux.

ϕ_4^* : stratégie de couverture optimale qui minimise le moment d'ordre quatre.
 ϕ_β^* : stratégie de couverture optimale qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative.
 ϕ_γ^* : stratégie de couverture optimale qui maximise la fonction d'utilité isoélastique.
 Γ : dérivée du Δ par rapport au sous-jacent, $\Gamma = \partial\Delta/\partial x_0$.
 N : nombre d'intervalles élémentaires jusqu'à la maturité de l'option, $T = N\tau$.
 P : Le prix d'une option de vente.
 \hat{C} : prix du marché d'une option de vente.
 $P(x, t|x_0, t_0)$: probabilité que le cours de l'actif sous-jacent X soit en x (à dx près) à l'instant t , sachant qu'au temps t_0 antérieur à t , le cours était en x_0 .
 $p(\cdot)$: probabilité historique ou aussi subjective.
 $p^{BS}(\cdot)$: probabilité historique dans le cadre de modèle de Black-Scholes.
 $q(\cdot)$: densité neutre au risque.
 $q^{BS}(\cdot)$: densité neutre au risque dans le cadre de modèle de Black-Scholes.
 $q^{ln}(\cdot)$: densité neutre au risque avec un mélange de distribution log-normales.
 $q^{her}(\cdot)$: densité neutre au risque avec un expansion d'Hermite.
 $q^{edg}(\cdot)$: densité neutre au risque avec un expansion d'Edgeworth.
 $q^{saut}(\cdot)$: densité neutre au risque avec un modèle avec sauts.
 $q^{ker}(\cdot)$: densité neutre au risque avec la méthode de noyau *kernel*.
 r : taux d'intérêt.
 \mathcal{R}_2 : écart-type du bilan financier global.
 \mathcal{R}_4 : risque du bilan financier global mesuré par le moment d'ordre quatre.
 \mathcal{R}_β : risque du bilan financier global via la maximisation de la fonction d'utilité exponentielle négative.
 \mathcal{R}_γ : risque du bilan financier global via la maximisation de la fonction d'utilité isoélastique.
 U : fonction d'utilité.
 ΔW : bilan financier global, par exemple, variation globale de la fortune entre la date d'émission et la maturité de l'option.
 x : cours de l'actif sous-jacent.
 x_k : cours de l'actif sous-jacent à l'instant k .
 x_s : prix d'exercice (strike) d'une option.

δx_k : accroissement de x entre les instants k et $k + 1$.

VaR : Value at Risk.

$MVaR$: VaR modifiée de Cornish Fisher.

$CVaR$: VaR conditionnelle.

σ : volatilité.

λ_3 : skewness.

λ_4 : kurtosis.

ρ_{BS} : fonction d'aversion au risque dans le cadre de modèle de Black-Scholes.

$\langle \cdot \rangle$: espérance mathématique d'une variable aléatoire.

$\langle \cdot \rangle_Q$: espérance mathématique sur la base de la distribution de probabilité neutre au risque.

Φ : distribution gaussienne.

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Quand nous observons les comportements des marchés financiers au cours des dernières années, notamment au cours de la période 2007-2010, et en particulier les fluctuations de l'indice CAC 40, nous remarquons des événements extrêmes. Ces événements présentent des fluctuations extrêmes et majeures. Elles ont une double nature : ce sont tout d'abord des événements rares, c'est à dire dont la probabilité d'occurrence est très faible ; ce sont ensuite des événements qui sont particulièrement coûteux. Une représentation gaussienne de ces événements est devenue de ce fait une vision simpliste et optimiste de la réalité. En d'autres termes, dans un univers gaussien, toutes les mesures de risques se ramènent à la variance ou encore à la volatilité. Cela est particulièrement vrai lorsque l'on a affaire à des produits dérivés qui se caractérisent le plus souvent par des flux non linéaires, tel que les options². L'impact des grands risques ou encore des risques extrêmes sur la théorie des options est devenu si important qu'il ne peut plus être ignoré dans la définition de la stratégie de couverture. C'est sous cet angle que ce travail aborde cette problématique en soulevant un intérêt particulier pour le problème de la couverture en présence de risque extrême et d'aversion au risque de l'investisseur.

Lors de la vente d'une option, deux questions se posent.

2. Une option donne le droit à son détenteur d'acheter un certain actif à un prix déterminé aujourd'hui, le prix d'exercice, pour une date future, l'échéance de l'option. Le règlement final pour le détenteur est nul si le prix de l'actif est plus bas que le prix d'exercice et strictement positif dans le cas contraire.

1. Quelle mesure du risque doit-on choisir pour mesurer le risque de cette émission ?
2. Quelle stratégie de couverture doit suivre l'émetteur afin de minimiser son risque dû aux fluctuations futures de l'actif sous-jacent ? En d'autres termes, peut-on construire une stratégie de couverture qui tient compte de degré d'aversion au risque de l'investisseur ?

La présentation habituelle de la théorie des options dans le cadre des hypothèses du modèle de Black-Scholes (1973) s'appuie sur la possibilité de construire des stratégies de couverture ayant un risque nul et qui dupliquent parfaitement le comportement de l'option en question jusqu'à l'échéance. Dans ce cas, la prime de l'option est déterminée de manière non ambiguë par un argument d'arbitrage. Selon ce modèle, il suffit de détenir une quantité bien précise de l'actif sous-jacent pour éliminer totalement le risque. On parle de la célèbre stratégie de couverture *delta-hedge*. Le ratio de couverture optimal n'est rien d'autre que la sensibilité de la prime de l'option par rapport au cours de l'actif sous-jacent. Donc, il suffit de déterminer la formule de l'évaluation de l'actif sous-jacent pour ensuite déduire le ratio de couverture.

$$\Delta_t = \frac{\partial C_t}{\partial x_t}$$

Plusieurs études antérieures ont montré que si on modifie l'une des hypothèses du modèle de Black-Scholes, la couverture en delta ou la notion risque *zéro* n'est plus théoriquement justifiée. En d'autres termes, le ratio de couverture en delta est une conséquence de certaines hypothèses spécifiques. Citons par exemple, Merton (1973), qui a montré qu'une couverture parfaite est possible si la volatilité moyenne est utilisée comme volatilité du titre sous-jacent dans l'équation de Black-Scholes. Boyle et Emmanuel (1980) ont montré que, lorsque le portefeuille réplique³ est ef-

3. On considère un actif financier qui procure en date T un flux de trésorerie X_T qui dépend de l'état du monde w à cette date, noté $X_T(w)$. Dire que l'actif financier X est réplique revient à dire que l'on peut construire un portefeuille tel que, à cette date T , la valeur V_T du portefeuille soit exactement égale à celle de X_T dans tous les états de monde. Si le portefeuille réplique exactement les flux de l'actif X , il est appelé pour cette raison le portefeuille *réplique* de X .

fectué de façon discrète, les mouvements de l'option et de l'actif sous-jacent ne sont plus corrélés. Ils ont conclu que la couverture n'est pas parfaite. Leland (1985) a déterminé un ratio de couverture donné par le delta de l'option mais avec une volatilité ajustée des frais de transaction. Il a montré que les relations d'arbitrage dérivées du modèle de Black-Scholes ne sont plus robustes en présence de frais de transaction. Donc cette stratégie de couverture *parfaite* est étroitement liée à ces hypothèses et au choix du modèle, par conséquent, elle s'effondre dès que l'on adopte une vision plus réaliste du marché.

Malheureusement, on ne peut pas justifier l'application d'une telle stratégie de couverture à risque nul sur des marchés où les fluctuations de l'actif sous-jacent sont non gaussiennes. Cependant, une couverture optimale à risque minimal existe. En d'autres termes, un investisseur rationnel cherche, naturellement, à minimiser le risque de sa position, c'est à dire, l'émetteur d'une option détermine la stratégie de couverture qui lui permet de réduire, autant que possible, le risque de sa position, d'où la notion de risque minimal. On passe d'une approche classique d'une couverture *parfaite* à risque zéro ayant une couverture *optimale* à risque minimum. Plus concrètement, une telle stratégie de couverture optimale dépend de la mesure de risque adoptée.

Certains auteurs ont considéré la variance comme une mesure du risque, nous citons par exemple Föllmer et Sandernaman (1986), Föllmer et Schweizer (1991), Bouchaud et Potters (1997,2000,2002), Bouchaud (2002), Baaquie, Lianga et Warachka (2007), Hulley et Mcwaler (2008). Ils ont admis que la variance du portefeuille est non nulle, et qu'il est possible de la minimiser afin de trouver le ratio de couverture optimale.

La considération de la variance comme une mesure du risque conduit à une sous estimation de la véritable volatilité ou encore du risque. En effet, dans un monde non-gaussien, la variance sous estime le risque réel. Plus précisément, les queues des distributions, qui nous renseignent sur la fréquence des grands mouvements, sont mal décrites par une loi gaussienne. En d'autres termes, le moment d'ordre

quatre (kurtosis) est plus sensible aux grandes fluctuations que le moment d'ordre deux (la variance). En ce sens, diverses mesures alternatives du risque ont ainsi été proposées. Favre et Galeano (2002) ainsi que Gregoriou et Gueyie (2003) ont proposé une mesure qui introduit le troisième et quatrième moment de la distribution des rentabilités dans la mesure du risque. La prise en compte du skewness (moment d'ordre trois) et du kurtosis est réalisée au moyen de la VaR (Value at Risk) modifiée de Cornish Fisher. Ils ont conclu que le risque mesuré seulement par la volatilité est sous estimé si le portefeuille présente un skewness négatif et/ou un kurtosis positif. Toutefois, ce ratio n'est pas exempt de critiques. En effet, la VaR modifiée de Cornish et Fisher (Modified Value at Risk ou MVaR), utilisée pour prendre en compte le risque des fonds, ne permet pas de considérer le risque inclut dans les moments supérieurs à l'ordre quatre de la distribution. Danielsson et Vries (1998) et Kellezi et Gilli (2000) ont introduit une mesure du risque fondée sur la théorie des valeurs extrêmes EVT (Extreme Value Theory). L'EVT se concentre sur la queue de la distribution, plutôt que sur l'ensemble de la distribution. En revanche, Fuss et al (2007) ont utilisé d'autres modèles d'estimation de la VaR (GARCH et EGARCH) permettant la modélisation et la prévision de la volatilité conditionnelle aux variations temporelles, intégrant ainsi le skewness et le kurtosis.

Bien que ces mesures de risque soient acceptées par le milieu académique et surtout professionnel, elles présentent un défaut majeur puisqu'elles ne tiennent pas compte de la fonction d'aversion au risque de l'investisseur. Afin de pallier à ce problème, nous développons théoriquement des mesures de risque fondées sur les fonctions d'utilité de l'investisseur et qui tiennent compte des moments d'ordre trois et quatre. C'est la première originalité de ce travail de recherche.

Selmi et Bellalah (2001) ont montré qu'un programme de maximisation de l'utilité espérée peut être équivalent sous certaines conditions à la minimisation d'une certaine mesure du risque, ils utilisent des fonctions d'utilité cubique et exponentielle négative pour tester leur approche. En revanche, cette mesure du risque ne peut être appliquée que pour des fonctions d'utilité bien définies. Plus précisément, l'application de cette mesure à une fonction d'utilité isoélastique conduit à une me-

sure nulle qui est très loin de la réalité. Pour pallier ces limites, nous proposons, dans le contexte de l'approche de l'utilité espérée, une mesure du risque générale, pour les différentes classes de fonctions d'utilité, qui tient compte de l'attitude de l'investisseur vis-à-vis du risque et des moments d'ordre deux, trois et quatre de la distribution. Nous proposons, donc, des mesures de risque pour les différentes classes de fonctions d'utilité. Plus concrètement, nous proposons des mesures de risque pour les fonctions suivantes : la fonction d'utilité exponentielle négative, les fonctions d'utilité isoélastique ou *utilité CRRA* (constant relative risk aversion) et hyperbolique ou *utilité HARA* (Hyperbolic absolute risk aversion). Pour valider nos résultats théoriques, nous appliquons ces mesures du risque aux indices boursiers les plus connus, à savoir CAC40, DAX, FTSE100, NIKKEI et NASDAQ, et les comparons avec les mesures du risque traditionnelles tels que la variance, les différents modèles de la VaR et l'Excepted Shotfall (ES).

Notre stratégie de couverture optimale est une solution d'un programme d'optimisation de la mesure du risque fondée sur l'approche de l'utilité espérée. Plus précisément, nous déterminons un ratio de couverture qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative et un ratio qui maximise la fonction d'utilité isoélastique. L'originalité de notre stratégie de couverture tient compte de l'aversion au risque de l'investisseur.

Le deuxième apport de ce travail de recherche épuise son originalité dans une étude comparative entre les résultats obtenus à partir de la couverture en delta de Black-Scholes (1973), du ratio de couverture qui minimise la variance de Bouchaud et Potters (1997, 2000) et du ratio de couverture qui minimise le moment d'ordre quatre de Bouchaud et Selmi (2003) d'un coté et le ratio qui maximise l'approche de l'utilité espérée de l'autre.

Au total, l'objectif principal de la thèse est double. Il s'agit d'une part, de déterminer une mesure du risque qui tient compte à la fois de l'attitude de l'investisseur vis-à-vis du risque et des moment d'ordre trois (skewness) et d'ordre quatre (kurtosis) qui est plus sensible aux grandes

fluctuations que le moment d'ordre deux (la variance). D'autre part, nous cherchons à trouver une stratégie de couverture optimale qui minimise le risque associé à l'approche de l'utilité espérée.

Nous avons pu mettre en évidence que les mesures de risque et la stratégie de couverture optimale, via l'approche de l'utilité espérée, que nous avons développées sont sensibles au niveau de l'aversion au risque. En d'autres termes, le paramètre de l'aversion au risque joue un rôle crucial dans la mesure du risque et la détermination de la stratégie de couverture optimale ce qui nous a conduit à estimer ce paramètre. La littérature économique suggère une relation fondamentale entre la densité neutre au risque, la densité subjective et l'aversion au risque. La densité neutre au risque néglige toute notion du risque sur le marché mais nous informe, néanmoins, sur les comportements futurs de l'actif sous-jacent en question. En revanche, la densité subjective (la densité historique) prend en compte la mesure du risque.

Les années quare-vingt ont marqué le début des recherches académiques quant à l'estimation du paramètre de l'aversion au risque. Les travaux empiriques tournent autour de deux résultats principaux mais contradictoires : le premier résultat prouve que l'aversion au risque est constante et le deuxième résultat montre qu'elle varie. Friend et Blume (1975) ont considéré que l'hypothèse d'une aversion au risque relatif constante constitue une approximation acceptable de la réalité. De même, Szpina (1986) a vérifié que l'hypothèse de l'aversion au risque relatif constante est vraie, il a trouvé que le coefficient d'aversion au risque se situe entre environ 1.2 et 1.8. Nakamura (2007), a testé la stabilité du coefficient d'aversion au risque pour les données journalières japonaise entre 1973 et 1991, il a montré que ce dernier est invariant. En revanche, Coutant (1999), Villa et Pérignon (2002) et Aït Sahlia et Lo (2000) ont prouvé que l'aversion au risque n'est pas constante. Les travaux de Jackworth (1996, 2000) portent sur l'effet de la crise sur la valeur de l'aversion au risque. Ils montrent que ce paramètre est positif et croissant au cours de la crise et décroissant et négatif après la crise. Ces résultats ont été confirmés par Tarsahev et al (2003) qui ont montré que ce paramètre a fortement augmenté pendant la période de la crise asiatique. De son cote, Nishiyama (2007) a étudié l'effet d'un changement du

coefficient de l'aversion au risque des banques américaines au banques japonaises. Il a constaté que l'augmentation de l'aversion au risque des banques américaines est sans ambiguïté associée à la crise asiatique, tandis que l'augmentation de l'aversion au risque des banques japonaises n'y est que faiblement associée. Cependant, les travaux de Bliss et Panigirtzoglou (2004) qui ont porté sur l'estimation de la fonction d'aversion au risque pour les options sur les indices S&P 500 et FSTE 100 et pour des différentes maturités. Ils ont montré que l'aversion au risque décroît en fonction de la maturité et la volatilité des marchés.

Formellement, le coefficient de l'aversion au risque est le rapport entre la densité neutre au risque (DNR) et la densité subjective (DS). Par conséquent, sa valeur dépend du choix de la densité neutre au risque. Puisque la densité subjective, qui est estimée à partir des données historiques de l'actif sous-jacent, est unique. En ce sens, il paraît nécessaire d'estimer la densité neutre au risque selon les différentes approches paramétrique, semi-paramétrique et non-paramétrique. L'utilisation de plusieurs méthodes d'estimation de la DNR, nous amène à choisir la meilleur méthode à choisir pour extraire la densité neutre au risque et par la suite estimer le paramètre de l'aversion au risque.

$$A_{at}(x_T) = \frac{p'_t(x_T)}{p_t(x_T)} - \frac{q'_t(x_T)}{q_t(x_T)}$$

où $p(\cdot)$ la densité subjective et $q(\cdot)$ la densité neutre au risque.

Une littérature extrêmement vaste a surgi à partir des années quatre vingt-dix sur la manière la plus appropriée pour estimer la densité neutre au risque. À l'origine de toutes les méthodes, nous trouvons les célèbres travaux de Breeden et Litzenberger (1978). Ils ont été les premiers à déterminer une relation entre les prix des options et la DNR. Ils ont montré que l'extraction de DNR peut être fondée sur un calcul numérique de la dérivée seconde du prix de l'option d'achat par rapport aux prix

d'exercice.

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_s^2} \Big|_{x_s=x_T} = e^{-r\tau} q(x_T)$$

où C le prix d'une option d'achat, x_s le prix d'exercice, x_T le cours de l'actif sous-jacent à l'échéance, r le taux sans risque et T la maturité.

Baraha (1996), Schernick, Garcia et Tirupattur (1996), Malik et Thomas (1997), tous ces auteurs ont utilisé un mélange des lois log-normales afin d'estimer la densité neutre au risque. Une autre approche d'estimation de la densité neutre au risque est fondée sur l'expansion d'Edgeworth autour de la loi log-normale. Citons par exemple, les travaux de Jarrow et Rudd (1982) et Carrodo et Su (1996). Une approche similaire développée par Madan et Milne (1994), Abken et al (1996) et Coutant (1999) propose d'estimer la densité neutre au risque à partir d'une approximation d'hermite. Quant à Elhassan et Kuccera (1999), ils ont utilisé un développement de Fourier-Hermite pour évaluer les options européennes et américaines pour extraire la DNR.

Une autre approche non-paramétrique est fondée sur les travaux de Breeden et Litzenberger (1978) pour estimer la densité neutre au risque. Rzepkawski (1996) a supposé que le prix de l'option d'achat est déterminé par le modèle d'Heston pour estimer la DNR en utilisant les résultat de Breeden et Litzenberger (1978). Quant à Aït Sahlia et Lo (2000) ont supposé que le prix d'une option d'achat est déterminé par le modèle de Black-Scholes (1973) mais avec une volatilité non-paramétrique afin d'estimer la DNR. Toujours dans le contexte de l'approche non-paramétrique, Rubinstein (1994,1996) et Jackwerth (1996) ont suggéré une méthode fondée sur les arbres binomiaux. Rubinstein (1994) a développé un arbre implicite pour estimer le prix de l'actif contingent à partir des prix des options. Sa méthode consiste à minimiser l'écart entre les probabilité implicite de l'arbre et les probabilités déterminées à partir de l'arbre de Cox-Ross-Rubinstein (1979). La spécification de cette méthode est de trouver une densité de probabilité dans un univers discret.

Structure de la thèse

Le premier chapitre⁴ comporte deux parties, la première partie est dédiée à la présentation des différentes mesures de risque traditionnelles, tel que la variance, VaR, CVaR. Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous proposons des mesures de risque via la maximisation de l'utilité espérée et les moments d'ordre élevés notamment les moments d'ordre trois et quatre. Plus concrètement, nous proposons des mesures de risque qui tiennent compte, en même temps, des préférences de l'investisseur et de son attitude vis à vis de risque et de moment d'ordre trois et quatre. Nous utilisons la fonction d'utilité exponentielle négative, la fonction d'utilité isoélastique ou "utilités CRRA" (constant relative risk aversion) et la fonction d'utilité hyperbolique ou "utilités HARA" (Hyperbolic absolute risk aversion). Nous terminons ce chapitre par une application de ces mesures de risque aux indices boursiers les plus connues, à savoir CAC40, DAX, FTSE100, NIKKEI et NASDAQ, et les comparons aux mesures traditionnelles.

Le deuxième chapitre⁵ a pour objectif d'estimer la densité neutre au risque DNR selon les trois différentes approches paramétrique, semi-paramétrique et non paramétrique et ce pour les options sur indice CAC 40. Plus précisément, nous comparons huit méthodes fondées sur les options afin d'extraire la densité neutre au risque implicite durant une période normale et une période de crise. Ces méthodes sont : la méthode de kernel et l'arbre binomial implicite pour l'approche non-paramétrique et six méthodes pour l'approche paramétrique et semi-paramétrique : une approximation de la densité neutre au risque fondée sur un calcul numérique de la dérivée seconde du prix de l'option d'achat (call) par rapport aux prix d'exercice (strike) selon Breeden et Litzenberger (1978), un mélange de distribution log-normales élaboré par Melick et Thomas (1997), l'expansion d'Edgeworth autour de la densité log-normale de Jarrow et Rudd (1982), les polynômes d'Hermite pro-

4. Ce chapitre a été présenté au 50ème Congrès annuel de la SCSE (Québec, 2010) et à la 12th International Business Research Conference (Dubai, 2010). Il est actuellement soumis à Review of Quantitative Finance and Accounting.

5. Ce chapitre a été présenté à la 15th Annual Conference of the African Econometric Society (The American University in Cairo, 2010). Il est actuellement soumis au Journal of Empirical Finance.

posés par Madan et Mline (1994), le modèle d'Heston et en fin le modèle avec sauts développé par Bates (1991).

Le troisième chapitre⁶ est consacré à l'estimation du paramètre d'aversion au risque implicite durant deux périodes, pré-crise et post-crise, et pour différentes maturités d'options, en utilisant la relation théorique fondamentale entre la densité neutre au risque, la densité subjective et la fonction de l'aversion au risque. Nous estimons la densité neutre au risque à partir des prix d'options sur l'indice CAC 40, par le mélange de log-normales proposée par Bahra (1996) et le modèle à sauts et la densité subjective estimée, par la méthode développée par Jackworth (2000), à partir d'une série temporelle de l'actif sous-jacent CAC 40. Nous étudions l'impact de la maturité de l'option, du modèle d'estimation de la densité neutre au risque et de la période d'étude de la fonction d'aversion au risque sur les mesures de risque.

Le quatrième chapitre a trait à la détermination d'une stratégie de couverture en se fondant sur les fonctions d'utilité dans un marché caractérisé par des fluctuations non gaussiennes. Dans un premier temps, nous déterminons une stratégie de couverture statique qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative, caractérisée par une aversion au risque absolue et une stratégie de couverture statique qui maximise la fonction d'utilité isoélastique, caractérisée par une aversion au risque relatif. Une comparaison entre les résultats obtenus à partir de la couverture en delta de Black-Scholes (1973), le ratio de couverture qui minimise la variance de Bouchaud et Potters (1997, 2000) et le ratio de couverture qui minimise le moment d'ordre quatre de Bouchaud et Selmi (2003) d'une part, et le ratio qui maximise l'approche de l'utilité espérée d'autre part, est systématiquement présentée. Dans un deuxième temps, nous cherchons une stratégie de couverture dynamique en se basant toujours sur la fonction d'utilité. Dans une optique d'un contrôle dynamique, il est souvent souhaitable de surveiller, en fonction de l'évolution du cours de l'actif sous-jacent le risque du portefeuille et de procéder ainsi de réajustements périodiques.

6. Ce chapitre a été présenté à la 15th Annual Conference of the African Econometric Society (The American University in Cairo, 2010) et soumis actuellement à Review of Derivatives Research.

Première partie

**LES MESURES DE RISQUE
DANS UN CADRE NON
GAUSSIEN : UNE MESURE
DÉDUITE DE LA FONCTION
D'UTILITÉ**

LES MESURES DE RISQUE DANS UN CADRE NON GAUSSIEN : UNE MESURE DÉDUITE DE LA FONCTION D'UTILITÉ

But du chapitre

L'objectif dans ce chapitre est d'aborder d'emblée la première question principale de cette thèse, à savoir déterminer une mesure de risque qui tient compte des préférences de l'investisseur et de son attitude vis à vis de risque. En premier lieu, nous allons déterminer une mesure du risque générale en se basant sur l'approche de l'utilité espérée, c'est à dire que l'on peut l'appliquer à n'importe quelle fonction d'utilité. La validation empirique de notre approche sur les indices boursiers les plus connues répond à la deuxième partie de ce chapitre. Pour illustrer nos résultats, en faisant appel aux différents types de fonctions d'utilité. La fonction d'utilité exponentielle négative, les fonctions d'utilité isoélastique ou "utilités CRRA" (constant relative risk aversion) et hyperbolique ou "utilités HARA" (Hyperbolic absolute risk aversion).

1.1 Introduction

La notion de risque est essentielle dans le domaine financier. Elle est à la base des choix d'investissement, des évaluations et des performances. Elle est le moteur essentiel des évolutions récentes de la finance, notamment les progrès des instruments dérivés et des nouvelles techniques de gestion. Un investisseur est dit risqué lorsque ses résultats espérés (son rendement espéré) sont incertains. Parce que les rendements espérés reposent sur des prévisions et des probabilités plutôt que des certitudes, les rendements réalisés peuvent être différents de ceux qui étaient projetés. Le risque est lié à cette incertitude. Mais mesurer le risque reste une activité délicate. "Markowitz (1952)" propose la variance comme une mesure du risque, (voir aussi Bouchaud et Potters (1997), Duffie et Richardson (1991), Liang (1999) et l'approche *moyenne-variance* pour déterminer le portefeuille optimal en minimisation la variance ou en maximisant les rendements. Cependant, son modèle est valable dans le cadre où la fonction d'utilité est quadratique ou les rendements de la richesse suivent une distribution normale¹. Pour pallier ce problème, *Markowitz* (1959) suggère la semi-variance comme une mesure du risque.

En ce sens, diverses mesures alternatives de risque ont ainsi été proposées parmi lesquelles figurent les mesures fondées sur la VaR (Value at Risk ou VaR) propose par Stone 1973, Pollatsek et Tversky 1970, Coombs et Lehner (1981,1984), Luce (1980), Fishburn (1982,1984), Sarin (1987), sur la VaR conditionnelle (Conditional Value at Risk ou CVaR) ou encore sur la VaR modifiée de Cornish et Fisher (Modified Value at Risk ou MVaR) comme indicateurs de risque et qui ont la particularité de pouvoir être utilisées pour n'importe quel actif et de donner des résultats faciles à interpréter. Artzner et al, (1999), Agarwal et Naik, (2004), utilisent la notion de la CVaR (VaR conditionnelle), un cadre qui représente explicitement la queue de distribution des rendements négatifs pour évaluer le risque. L'avantage de la CVaR est qu'elle satisfait certains axiomes plausibles, contrairement à la VaR classique qui se réfère uniquement à la fréquence des événements extrêmes, la CVaR se concentre

1. Liang (1999) souligne que les distributions mensuelles des rendements de hedge funds montrent un skewness négatif extrêmement élevé, un excès de kurtosis positif.

sur la fréquence et l'ampleur des pertes en cas d'événements extrêmes. Les auteurs comparent et opposent les pertes extrêmes de portefeuilles construits dans un cadre moyenne-variance et dans un cadre moyenne-CVaR et constatent que l'utilisation du premier sous estime substantiellement les risques de pertes. Cette sous-estimation est d'autant plus importante que la volatilité est faible.

Contrairement aux mesures précédentes, Favre et Galeano (2002) ainsi que Gregoriou et Gueyie (2003) proposent une mesure qui introduit le troisième et quatrième moment de la distribution des rentabilités dans la mesure du risque. La prise en compte du skewness et du kurtosis est réalisée au moyen de la VaR modifiée de Cornish Fisher (MVaR²). Ils concluent que le risque mesuré seulement par la volatilité est sous estimé si le portefeuille présente un skewness négatif et/ou un kurtosis positif. Toutefois, ce ratio n'est pas exempt de critiques. En effet, la MVaR, utilisée pour prendre en compte le risque des fonds, ne permet pas de considérer le risque inclut dans les moments supérieurs à l'ordre quatre de la distribution.

Danielsson et Vries (1998) et Kellezi et Gilli (2000) introduisent une mesure du risque fondée sur la théorie des valeurs extrêmes (EVT). L'EVT se concentre sur la queue de la distribution, plutôt que sur l'ensemble de la distribution. Gupta et Liang (2005) évaluent le risque des hedge funds en comparant la VaR normale et la VaR EVT aux mesures traditionnelles de risque et concluent que la VaR est plus appropriée pour capturer le risque des hedge funds que l'écart-type dès lors que leur rendements sont exposés à un kurtosis très élevé. L'hypothèse de normalité peut sous-estimer le risque réel et n'est pas en mesure de déterminer l'adéquation des fonds propres pour l'industrie des hedge funds. Les auteurs indiquent que les estimations fondées sur la VaR EVT sont en mesure de prévoir avec précision les rendements extrêmes des hedge funds. En revanche, Fuss et alii (2007) utilisent d'autres modèles d'estimation de la VaR (GARCH et EGARCH) permettant la modélisation et la prévision de la volatilité conditionnelle aux variations temporelles, intégrant ainsi le skewness et le kurtosis. Selon ces auteurs, la VaR classique et la VaR de Cornish

2. La MVaR est similaire à la VaR classique, mais elle est supposée donner de meilleurs résultats dans le cas des actifs avec des rendements négatifs extrêmes

Fisher sont statiques alors la VaR de type GARCH est plus sensible aux changements dans le processus de rendement et permet alors de le retracer de manière plus efficace. De plus, les ratios de performance indiquent que la VaR normale et la VaR CF ont une capacité de prévision inférieure par rapport à la VaR de type GARCH.

Ces mesures du risque présentent un défaut majeur : elles ne tiennent pas compte de la fonction d'aversion au risque de l'investisseur. Une autre approche consiste à définir une mesure qui regroupe en même temps les caractéristiques de la distribution de rentabilité et de la fonction d'aversion au risque.

Le littérature suggère plusieurs modèles standards qui ont souvent tendance à réduire un programme de maximisation de l'espérance de l'utilité de l'approche "moyenne-variance" de Markowitz (1952). En d'autre terme, cette approche suppose que les préférences des investisseurs sont, bien exprimées par une fonction d'utilité définie sur les deux premiers moments de la distribution de richesse. En revanche, les préférences des investisseurs ne peuvent pas être exprimées par une fonction définie uniquement par les deux premiers moments d'une distribution de rendements que dans un cadre gaussien. Plus précisément, les moments d'ordre un et deux ne permettent pas de décrire entièrement la distribution d'une variable considérée dans un cadre non gaussien. Cependant, de très nombreuses études empiriques ont montré que les distributions de rentabilité des actifs financiers présentent généralement le phénomène de Kurtosis c'est-à-dire une pointe autour de la moyenne et ils suivent une distribution leptokurtique, laquelle se caractérise par des queues de distributions épaisses ("*fat-tailed distribution*"). En ce sens, il est nécessaire d'exprimer les préférences des investisseurs par des fonctions d'utilité définies sur les quatre premiers moments (l'espérance, la variance, le skewness et la kurtosis) d'une distribution de richesse aléatoire tel que la fonction d'utilité exponentielle négative ou "utilités CARA" (constant absolute risk aversion), la fonction d'utilité isoélastique ou "utilités CRRA" (constant relative risk aversion) et enfin, la fonction d'utilité hyperbolique ou "utilités HARA" (Hyperbolic absolute risk aversion).

Dans le contexte de l'approche de l'utilité espérée, Bell (1988) propose une fonc-

tion d'utilité exponentielle plus une fonction linéaire de la forme $U(x) = ax - be^{-cx}$ avec $a \geq 0$, $b > 0$ et $c > 0$ pour déterminer une mesure du risque sous la forme $\langle e^{-c(x-\langle X \rangle)} \rangle$. En 1995, il a appliqué cette même technique de mesure du risque en utilisant d'autres types de fonctions d'utilité. Heston (1970) propose une mesure du risque "générale" de la forme $U(\langle X \rangle - \langle U(X) \rangle)$. Par ailleurs, Jia et Dyer (1996) suggèrent une forme générale de mesure du risque de la forme : $R = -\langle U(X - \langle X \rangle) \rangle$.

Tout en restant dans le contexte de l'approche de l'utilité espérée, notre analyse consiste à déterminer une mesure du risque qui tient compte des moments d'ordre trois (le skewness) pour étudier l'asymétrie de la distribution de la variable aléatoire considérée et le moment d'ordre quatre (le kurtosis) qui donne une idée sur le phénomène leptokurtique. Selmi et Bellalah (2001) ont montré qu'un programme de maximisation de l'utilité espérée peut être, équivalent sous certaines conditions, à la minimisation d'une certaine mesure du risque, ils utilisent des fonctions d'utilité cubique et exponentielle négative pour tester leur approche. En revanche, cette mesure du risque ne peut être appliquée que pour des fonctions d'utilité bien définies. Plus précisément, l'application de cette mesure à une fonction de type isoélastique conduit à une mesure nulle qui est très loin de la réalité.

Dans ce chapitre on essaye de remédier aux limites des travaux de Selmi et Bellalah (2001) car leur mesure du risque n'est applicable que pour des fonctions d'utilité bien définies comme les fonctions d'utilité cubique et exponentielle négative. L'application de leur mesure du risque à une fonction d'utilité isoélastique donne une valeur nulle. Tout en restant toujours dans le contexte de l'approche de l'utilité espérée, on détermine une mesure du risque générale, pour les différentes classes de fonction d'utilité qui tient compte à la fois de l'attitude de l'investisseur vis-à-vis du risque et des moments d'ordre trois et quatre. Plus concrètement, on va proposer des mesures de risque pour les fonctions suivantes : La fonction d'utilité exponentielle négative, les fonctions d'utilité isoélastique ou "utilités CRRA" (constant relative risk aversion) et hyperbolique ou "utilités HARA" (Hyperbolic absolute risk aversion). Pour valider nos résultats théoriques, on va appliquer ces mesure du risque aux indices

boursiers les plus connus, à savoir CAC40, DAX, FTSE100, NIKKEI et NASDAQ, et les comparer avec les mesures traditionnelles tel que la variance, les différents modèles de la VaR et l'Expected Shortfall.

Ce chapitre est organisé comme suit. La deuxième section définit les principaux risques financiers. La troisième section présente les différentes mesures de risque traditionnelles à savoir la variance, plus précisément l'approche moyenne-variance, les différentes approches de VaR (VaR empirique, VaR variance-Covariance, VaR RiskMetrics), la VaR fondée sur les moments d'ordres élevés et en fin les l'Expected Shortfall (VaR conditionnelle). La quatrième section traite l'une de principale problématique de cette thèse à savoir déterminer une mesure du risque en se fondant sur les fonctions d'utilité. La dernière section conclut le chapitre.

1.2 Les principaux risques financiers

1.2.1 Les risques non financiers

Ce sont les risques n'ayant pas leur origine dans les prises de position de l'établissement (octroi de financements, collecte de ressources financières, activité de marché) mais dans son fonctionnement au quotidien et ses processus de gestion. Ils relèvent aujourd'hui de deux familles : Risques opérationnels et risques stratégiques.

1.2.1.1 Risques opérationnels

Pour le comité de Bâle³, il s'agit du risque de perte directe ou indirecte d'une inadéquation ou d'une défaillance attribuable à des procédures, personnels, système interne ou événements extérieurs. Quatre principaux événements ont été identifiés comme risques opérationnels :

- Risques inhérents aux personnes et aux relations entre les personnes : Les pertes causées par des collaborateurs, intentionnellement ou non, ou par les relations qu'un établissement entretient avec ses clients, ses actionnaires, les

3. Le Comité de Bâle ou bien *Comite de Bâle sur le contrôle bancaire* est une institution créée en 1974 par les gouverneurs de Banque centrales du groupe de dix (G10) ausein de la Banque de règlements internationaux à Bâle.

régulateurs ou des tiers parties. Cette catégorie de risques recouvre une palette assez large et diversifiée.

- Risques inhérents aux procédures : Les pertes issues de l'échec de transaction sur les comptes clients, les règlements ou sur tout autre processus de l'activité courante. On parle parfois de risques administratifs, pouvant aboutir à une rupture dans la continuité du traitement des dossiers et des opérations. Ces risques sont eux même liés à ceux des outils informatiques qui, s'il sont inexploitable, peuvent conduire à une paralysie totale.
- Risques inhérents aux systèmes : Les pertes venant d'une interruption de l'activité ou d'une indisponibilité du système en raison d'un problème d'infrastructure ou de technique. On trouve ici les risques des systèmes tenant au stockage des informations au sein des bases de données.
- Risques inhérents aux tiers : Les pertes dues aux actions d'éléments extérieurs, notamment la fraude externe, ou causant des dommages aux actifs meubles et immeubles. Les changements réglementaires affectant négativement l'activité de l'établissement relève aussi de cette catégorie. On trouve ici les risques environnementaux pouvant entraîner l'arrêt voire la disparition de l'outil de travail : tempêtes, innovations, feu...

1.2.1.2 Risques stratégiques

A la différence des précédents, ils restent difficilement quantifiables et sont d'ailleurs exclus des discussions du comité de Bâle. Autrement dit, ils ne peuvent être couverts par une allocation spécifique des fonds propres. Ils sont principalement liés aux décisions prises par les responsables bancaires en matière d'orientation de la politique commerciale et de développement. Le corollaire de risques stratégiques, voire des risques opérationnels, est la dégradation de l'image et de la notoriété des établissements les plus touchés par ces genres de risques. Les conséquences sur le PNB et les pertes de clientèle restent difficilement chiffrables ; on constate toutefois une double conséquence financière, tant au niveau de provisionnement que de la perte des revenus.

1.2.2 Les risques financiers

1.2.2.1 Risques de crédit

L'événement risqué est le non-respect par un client ou par une contrepartie de ses obligations financières ou, de manière plus générale, la détérioration de la qualité crédit de cette contrepartie. Aussi appelé risque de contrepartie ; s'il existe plusieurs types de risques de crédit, celui de non remboursement est un risque majeur (Manchon, (2001)). Heem (2000) définit le risque de contrepartie pour le banquier comme : *Le risque de voir son client ne pas respecter son engagement financier, à savoir, dans la plupart des cas, un remboursement de prêt.*

Dans un sens plus large, ce risque de contrepartie désigne aussi le risque de dégradation de la santé financière de l'emprunteur qui réduit les probabilités de remboursement. On peut distinguer deux phases principales dans la vie d'un crédit : sa mise en place et son déroulement. Le risque de défaillance du client est essentiellement lié à sa cessation de paiement et à son insolvabilité. C'est en effet à ces deux types d'événements que La Bruslerie (1999) résume les défaillances d'entreprises. Pour Bardos (2001), sont considérées comme défaillantes les entreprises ayant subi l'ouverture d'une procédure collective : redressement ou liquidation judiciaire.

Dans un contexte anglo-saxon, Pastena et Ruland (1986) parlent de défaillance financière dans les trois cas suivants : lorsque les capitaux propres sont négatifs, lorsque l'entreprise ne peut faire face à ces obligations financières au moment où elles deviennent exigibles et lorsque l'entreprise poursuit son activité ou est liquidée sous la protection d'un tribunal. Plus proches de la problématique bancaire, Ward et Foster (1997) proposent plutôt les difficultés de remboursement d'un prêt ou sa renégociation comme critères de défaillance. Dans tous les cas, la défaillance du client implique que le banquier recouvre difficilement ses ressources voire même ne les récupère pas. L'analyse du risque de défaillance vise donc à déterminer le risque d'occurrence de tels événements : la décision d'octroyer ou non le crédit sera prise sur la base de cette analyse, au regard de la politique générale de la banque concernant le risque mais aussi des aspects commerciaux comme la volonté de conserver un bon client ou de s'introduire dans un secteur particulier. Lors de la demande de crédit, le

banquier responsable collecte des informations auprès du client et d'autres sources externes afin de monter le dossier de crédit et les complète par des informations internes lorsque le demandeur est déjà client. Ce dossier va servir de support à l'analyse du risque de crédit qui va conduire le banquier, généralement assisté par un comité, à décider de l'opportunité d'accorder ou non le crédit, en fonction de la politique de risque et de rentabilité ainsi que de la volonté stratégique de la banque. Si le crédit est accordé, un contrat est mis en place. Si les conditions du crédit ont souvent été déjà négociées entre le banquier et le client lors de la demande de crédit, le comité peut décider de les modifier. Ces conditions visent généralement à réduire les risques pour la banque : ce sont le plus souvent des garanties réelles et personnelles, parfois accompagnées de covenant et de souscriptions d'assurances. Selon les procédures définies au sein de la banque, une note peut être attribuée au crédit ou au client parallèlement à la décision de prêter ou non : elle servira dans le suivi du crédit ou pour des analyses de risque postérieures. Au cours du crédit, le banquier surveille un certain nombre d'indicateurs de difficultés du client, analyse régulièrement le risque de défaillance et révisé la note afin de prendre des mesures permettant de recouvrer au mieux sa créance et éventuellement désengager la banque. En fonction du déroulement du crédit, celui-ci peut prendre fin sans incident avec le remboursement ou finir de façon contentieuse : dans ce dernier cas, le travail de suivi pourra contribuer à un meilleur recouvrement. Tout produit bancaire pour lequel un défaut de paiement du client entraînerait une perte pour la banque doit donc faire l'objet d'un calcul de risque crédit. L'horizon de temps pertinent pour le risque de crédit s'étale donc jusqu'à l'expiration des contrats, mais il est souvent ramené à un an, période de recapitalisation de la banque.

1.2.2.2 Risques d'illiquidité

Ils conduiraient une banque à être dans l'incapacité de rembourser des dettes à court terme parce que les actifs qu'elle détient sont à plus long terme. Or, le financement d'emplois longs par des ressources à plus courte échéance constitue la base même du métier de banquier au travers du risque de transformation. Ils sont principalement liés à trois facteurs (Darmon (1997)).

- Risque intrinsèque de bilan : Désormais, les banques recherchent leurs res-

sources non seulement à partir des dépôts de la clientèle mais aussi sur les marchés : interbancaire, obligataire, actionnaires. En conséquence, la liquidité n'est plus une situation subie, résultant de l'activité de la banque, mais le résultat d'une gestion complexe visant à optimiser le contenu du bilan. En outre, les modifications de l'environnement financier se traduisent par une instabilité croissante et la tentation d'accroître sa rentabilité par la recherche de ressources à faible coût, ou bien d'allonger la durée des placements. Du côté des crédits, il n'est pas toujours facile de prévoir exactement les montants souhaités, ni les dates (épargne logement).

- Attitudes des agents économiques à l'égard de l'établissement : La confiance qu'inspire une banque lui permet de réaliser ses opérations de collecte de ressources et de refinancement dans les meilleures conditions. Cette situation assure la rentabilité de ces opérations, rassurant encore un peu plus les offreurs de capitaux (cercle vertueux). A l'inverse, une perte de confiance provoque le phénomène opposé avec des conséquences directes sur les marges (cercle vicieux). Elle peut provenir de rumeurs, de changement de dirigeants, de la défaillance de contreparties...
- Liquidité générale des marchés : Une insuffisance générale de liquidité peut résulter du jeu de l'offre et de la demande sur les marchés, mais également d'interventions des autorités monétaires ou de disposition réglementaire dissuadant des investisseurs d'intervenir. Ce manque, qui est également la manifestation d'une crise systémique, ne se traduit quasiment jamais par l'impossibilité de se financer mais par une hausse des taux.

1.2.2.3 Risques de prix

Ils concernent à la fois les taux d'intérêt, les taux de change, la valeur des actions et celle des matières premières qui sont qualifiés généralement comme risque de marché.

- Taux : La question de taux d'intérêt est centrale, d'abord parce qu'ils sont spécifiques au métier d'intermédiation et de transformation, ensuite car leurs modes de gestion peuvent facilement se transposer aux autres formes de risques de marché. Le risque de taux est celui que fait courir au porteur d'une créance

ou d'une dette l'évolution ultérieure des taux (Darmon [1997]). Il peut se matérialiser sous trois formes : moins- value sur la valeur des actifs ou accroissement de la valeur des passifs, baisse des marges d'intérêt et de la rentabilité, déclenchement des engagements hors bilan. Ce risque est si important dans une banque commerciale dont l'activité principale est l'intermédiation (financement et collecte des dépôts dans le but de générer la marge d'intérêt). Au-delà du contrôle de la solvabilité des emprunteurs, la rentabilité reste largement dépendante des conditions (taux) de la transformation de dépôts à vue ou à terme, peu ou pas rémunérés, en financements à court, moyen ou long terme. Les banques dont la collecte est importante -clientèle constituée majoritairement de particuliers- se trouvent alors exposées à un risque lorsqu'il y a baisse des taux. L'exposition au risque dépend de trois facteurs :

1. Structure du bilan par type de taux (fixes, réglementés, révisable, variables...) et par type d'actifs (crédits, obligations, actions, immobiliers)
2. Vitesse de renouvellement des actifs et des passifs
3. Situation prêteuse ou emprunteuse

De même la structure du produit national brut (PNB) traduit l'importance de cette exposition en fonction de la part de la marge de l'intérêt par rapport aux commissions, qui présentent d'avantage de ne pas être directement soumise aux effets des variations de taux. Depuis quelques années, la mesure de ce risque fait l'objet d'une attention particulière. Dans la pratique, plusieurs méthodes sont utilisées, chacune comportant avantages et inconvénients :

1. Méthode statique ou dynamique
 2. Mesure de l'impact sur les marges à travers la mesure de gap de taux
 3. Mesure de la valeur nette de l'établissement à travers des mesures de sensibilité et de duration.
- Autres risques : les autres risques de marché ont un impact comparable. Le risque de change apparaît lorsqu'une partie du bilan est libellé en devises étrangères. Le risque sur les actions ou les matières premières concerne la valorisation par les marchés des actifs détenus par la banque. Cette stratégie de détention d'un portefeuille pour son propre compte a eu tendance à se

généraliser ces dernières années, avec pour effet d'augmenter, dans les résultats bancaires, la part des produits de marché au détriment des marges d'intermédiation classiques. Sur ce type d'activité, l'objet n'est d'ailleurs plus vraiment d'éviter un risque mais plutôt de le mesurer et de le gérer en le limitant à un niveau jugé normal par les dirigeants, en fonction des gains espérés et des probabilités de perte.

1.3 Les mesures de risque traditionnelles

1.3.1 L'approche moyenne-variance

Harry Markowitz, en proposant en 1952 son célèbre modèle *moyenne-variance*, a donné le point de départ de la théorie moderne de la gestion de portefeuille et la mesure du risque. Cette approche a fait l'objet d'un très vaste littérature sous forme d'articles ou d'ouvrages financiers. Il suppose qu'on peut définir le risque par la variance. Son choix est principalement justifiée par deux raisons⁴. Lorsque la fonction d'utilité est quadratique et que la rentabilité suit une loi gaussienne, alors elle peut être définie par les deux premiers moments : la moyenne et la variance. En revanche, ce modèle trouve ses limites dans les deux raisons qui la justifient. D'une part, l'hypothèse gaussienne est souvent restrictive. D'autre part, comme le notait Eeckhoudt et Gollier (1992), les fonctions d'utilité quadratiques posent en effet, deux problèmes. Le premier tient au fait que toutes les fonctions d'utilité quadratiques concaves sont décroissantes au-delà d'un certain niveau. Le second problème tient au fait que les fonctions d'utilité quadratiques sont caractérisées par une aversion absolue au risque qui est croissante en fonction de la variable étudiée.

Les résultats du tableau 2-1 indiquent que la volatilité des rendements des indices boursiers qui englobe le risque systématique et le risque spécifique est relativement élevée. La volatilité n'est pas une mesure cohérente du risque (voir Artzner et al. (1998)⁵), d'une part les gains et les pertes sont pris en compte de manière ana-

4. Voir annexe

5. Ils définissent quatre propriétés qu'une mesure du risque doit satisfaire pour qu'elle soit cohérente.

Tableau 2-1 – Statistiques descriptives des rendements des indices

<i>Indices</i>	<i>Moyenne</i>	<i>Ecart type</i>	<i>Skewness</i>	<i>Kurtosis</i>	<i>Etendu</i>	<i>JB statistic</i>
CAC 40	-2.653 E-04	0.0157	0.0280	8.5160	0.2007	2.9110 E03 **
DAX	-1.4819 E-04	0.0166	0.0942	7.5557	0.1823	1.9811 E03
FTSE 100	-1.792 E-04	0.0132	-0.0952	9.8606	0.1865	4.4591 E03
NIKKEI	-3.4529 E-04	0.0163	-0.3327	10.0455	0.2535	4.6116 E03
NASDAQ	-4.2573 E-04	0.0194	-0.2216	7.3078	0.2075	1.7547 E03

** Pour une significativité au seuil de 95%.

Ce tableau rapporte les quatre premiers moments de la distribution des rendements ($\log(\frac{x_t}{x_{t-1}})$) des indices CAC 40, DAX, FTSE 100, NIKKEI et NASDAQ. La période d'étude s'étend de 02/01/2002 à 31/12/2008. Le test de Jarque-Bera permet de tester la normalité des distributions.

logue ce qui évidemment ne correspond pas à la réalité. D'autres part, elle ne vérifie pas l'axiome d'invariance par translation. Cette mesure n'est donc pas valable pour

Soit (Ω, F) un espace mesurable, Ω est l'espace des états possibles de nature. La valeur future du portefeuille dans les différents états de la neutre est un vecteur noté W . L'actif sûr est noté r , c'est un actif sans risque.

Invariance par translation : Étant donnée une mesure du risque \mathcal{R} . Pour tout α constant et un portefeuille de risque W , on a :

$$\mathcal{R}(W + \alpha.r) = \rho(W) - \alpha$$

Sous-additivité : Pour tous portefeuilles de risque W_1 et W_2 , on a :

$$\mathcal{R}(W_1 + W_2) \leq \mathcal{R}(W_1) + \mathcal{R}(W_2)$$

La mesure du risque d'une somme de deux portefeuilles risquées est inférieur à la somme des mesures du risque de ces deux portefeuilles. Ce résultat est dû à la corrélation qui peut exister entre ces derniers.

Homogénéité positive : Pour tout portefeuille de risque W et tout réel $\lambda \geq 0$;

$$\mathcal{R}(\lambda W) = \lambda \mathcal{R}(W)$$

La propriété d'Homogénéité positive implique que la multiplication de chaque risque d'un portefeuille par un scalaire augmente la mesure du risque par le même scalaire.

Monotonie : Pour tous portefeuilles de risque W_1 et W_2 avec $W_1 \leq W_2$, on a :

$$\mathcal{R}(W_1) \leq \rho(W_2)$$

Si le portefeuille W_1 domine le portefeuille W_2 , le mesure du risque du portefeuille W_1 est supérieur à celle de W_2 .

les queues de distribution, là où justement se situe les risques les plus importants. L'étendu, représentant l'écart entre le rendement maximum et le rendement minimum, est relativement élevé pour la plupart des indices ce qui implique que les rendements sont dispersés et par conséquent le risque encouru est important. Malgré la simplicité et la facilité de calcul de l'étendu, il reste fortement sensible aux valeurs extrêmes qui peuvent souvent être des observations aberrantes et ignore les rendements intermédiaires. Afin d'examiner la forme de la distribution statistique des rendements, nous employons le coefficient d'asymétrie (Skewness) et le coefficient d'aplatissement (Kurtosis). La plupart des rendements des indices boursiers présentent des profils de risque asymétriques du côté des pertes (skewness négative) et à queues de distribution épaisses (kurtosis élevée) ce qui convient à conclure que la distribution est leptokurtique qui engendre une vulnérabilité aux risques de perte extrêmes. En dépit de sa courante utilisation et sa simplicité, le Kurtosis présente quelques limites, notamment sa forte sensibilité aux très grandes valeurs (outliers). En outre, son estimation peut être erronée lorsque la taille de l'échantillon n'est pas très grande. Autrement dit, le Kurtosis n'est pas une mesure robuste de non-gaussianité. Pour remédier à cette lacune, nous procédons au test de Bera Jarque⁶. L'hypothèse de normalité des rendements n'est pas acceptée. Il résulte de ce qui précède que la distribution des rendements des indices n'est pas gaussienne ce qui coïncide avec les résultats obtenus à travers le coefficient d'aplatissement (Kurtosis).

1.3.2 Une VaR statique : VaR empirique, VaR Variance-Covariance et VaR RiskMetrics

Pour pallier aux difficultés rencontrées lors de l'application de certains modèles, nous postulons la fameuse loi normale pour la distribution des rendements des indices boursiers pour la méthode Variance-Covariance. La méthode empirique ne suppose aucune forme de loi pour la distribution des rendements. En revanche, la méthode Risk Metrics suggère le calcul d'une volatilité historique pondérée. Cette approche

6. Le test de Jarque-Bera indique que la statistique $JB = \frac{n}{6} \left(\lambda_3 + \frac{\lambda_4 - 3}{24\lambda_4} \right)$, avec n la taille de l'échantillon, λ_3 le skewness et λ_4 la kurtosis.

a été proposée par la banque JP Morgan dans le cadre de son modèle VaR⁷ : RiskMetricsTM (1996). La volatilité future est donnée par :

$$\sigma_{t+1}^2 = \lambda\sigma_t^2 + (1 - \lambda)r_t^2, \quad 0 < \lambda < 1. \quad (1.3.1)$$

avec r_t le rendement.

L'idée liée à ce schéma de pondération est que le marché accorde plus d'importance aux évolutions du cours les plus récentes. Cette équation incorpore une structure autorégressive de la variance traduisant le phénomène de regroupement de la volatilité. Dans ce modèle le poids λ est estimé par 0.94 pour une fréquence journalière des rendements et il est égal à 0.97 pour une fréquence mensuelle.

L'application de la famille de mesures statiques fondées sur la Value at Risk (VaR) fournit les résultats suivants (tableau 2-2)⁸

7. Par définition, la VaR est la perte maximale que peut subir un gestionnaire de portefeuille durant une période de temps avec une probabilité donnée. En d'autres termes, la VaR n'est rien qu'un fractile de la distribution de pertes et profits associée à la détention d'un actif ou d'un portefeuille d'actif sur une période donnée.

8.

- Le calcul de la VaR selon la méthode historique se base sur quatre étapes :

Étape 1 : Calculer la valeur actuelle du portefeuille ;

Étape 2 : Recueillir les rendements historiques pour chaque facteur de risque impliqué (prix de l'action, taux de change, taux d'intérêt...);

Étape 3 : Calculer la valeur historique des pertes et profils du portefeuille et les ranger par ordre croissant ;

Étape 4 : Calculer la VaR, en fonction du niveau de confiance et du nombre de données historique utilisées. Par exemple si l'on a 1000 données historiques et que le niveau de confiance est 95%, la VaR est le 51 ième valeur de la liste et le 11 ième valeur de la liste pour un niveau de confiance de 99%.

- Le calcul de la Value at Risk, selon la méthode Variance-Covariance, est comme suit :

Étape 1 : Calculer la valeur actuelle, V_0 , du portefeuille ;

Étape 2 : Estimer la moyenne m et la volatilité σ des rendements futures du portefeuille (à partir des données historique) ;

Étape 3 : Calculer la VaR à partir de cette formule :

$$VaR = V_0 (-m + \sigma Z_p)$$

où Z_p est égale à 1,65 si le niveau de confiance est de 95% et égale à 2,33 si le niveau de confiance est de 99%.

Tableau 2-2 – VaR empirique (VaR_{emp}), VaR Variance-Covariance (VaR_{V-C}), VaR RiskMetrics (VaR_{RM})

Indice	VaR_{emp} 95% / 99%	VaR_{V-C} 95% / 99%	VaR_{RM} 95% / 99%
CAC 40	-0.0249 / -0.0468	-0.0260 / -0.0367	-0.0577 / -0.0815
DAX	-0.0264 / -0.0508	-0.0275 / -0.0388	-0.0426 / -0.0602
FTSE 100	-0.0201 / -0.0405	-0.0220 / -0.0310	-0.0533 / -0.0754
NIKKEI	-0.0247 / -0.0482	-0.0271 / -0.0382	-0.0337 / -0.0477
NASDAQ	-0.0318 / -0.0563	-0.0324 / -0.0456	-0.0554 / -0.0783

D'abord, il est important de remarquer du tableau 2-2 que la VaR varie en fonction du niveau de confiance. Certes, la perte est d'autant plus élevée que le niveau de confiance croît. Le principal critère de choix du niveau de confiance trouve son origine dans le degré d'aversion au risque. En effet, plus l'investisseur est averse au risque plus il choisit un niveau de confiance plus élevé. Il est cependant préférable de choisir un niveau de confiance qui ne soit pas assez élevé afin de ne pas perdre l'information sur les valeurs extrêmes.

L'évaluation du risque par les trois mesures statiques de la VaR confirme, comme indiqué par la mesure de l'écart-type, que l'indice NASDAQ s'avère l'indice le plus risqué et ce, quelque soient le niveau de confiance et la mesure du risque considérés. La VaR obtenue par la méthode de Variance-Covariance est supérieure à la VaR historique et ce quelque soit l'indice boursier considéré pour un niveau de confiance de 95% et elle est inférieure à celle-ci pour le niveau de confiance égal à 99%. Cependant elle est inférieure à la VaR calculée par la méthode RiskMetrics quelque soit le niveau de confiance pour tous les indices boursiers. Ces résultats ont montré que les outils traditionnels d'étude du risque construits sur le modèle gaussien sous estiment le risque de perte.

1.3.3 Une mesure de la VaR fondée sur les moments d'ordres élevés

L'objet de ce paragraphe est d'exprimer la valeur de la Value at Risk d'une distribution quelconque autre de la VaR gaussienne, en fonction des moments de

distribution en question, plus précisément d'ordre trois et quatre. Pour atteindre ce but, nous faisons appel au développement de Cornish-Fisher (1937,1960) en se basant sur les séries d'expansion de Gram-Charlier et Edgeworth. Soient $X(U_\alpha)$ la quantile d'ordre α d'une distribution quelconque centrée et réduite et U_α celui de la distribution gaussienne standard. Johnson et al (1994) ont montré, en se fondant sur le développement de Cornish-Fisher (1937,1960), que les deux quantiles $X(U_\alpha)$ et U_α vérifient la relation suivante :

$$X(U_\alpha) = U_\alpha + \frac{1}{6}(U_\alpha^2 - 1)c_3 + \frac{1}{24}U_\alpha(U_\alpha^2 - 3)c_4 + \dots, \quad (1.3.2)$$

où c_i est le cumulatif d'ordre i de la loi standardisée de X .

La VaR d'une distribution quelconque (de densité $f_x(x)$) et celle d'une distribution gaussienne (de densité $f_G(x)$) et qui l'on note par VaR_G vérifier la relation suivante :

$$\int_{-\infty}^{-VaR_\alpha} f_x(x) dx = \int_{-\infty}^{VaR_{G,\alpha}} f_G(x) dx. \quad (1.3.3)$$

Comme nous avons signalé au début de ce paragraphe que l'approximation de Cornish-Fisher s'applique que pour des variables standardisées c'est à dire centrées et réduites.

Soit $\tilde{X} = \frac{X - \langle X \rangle}{\sigma_X}$, il vient donc ;

$$\int_{-\infty}^{-\widetilde{VaR}_\alpha} f_{\tilde{x}}(\tilde{x}) d\tilde{x} = \int_{-\infty}^{q_\alpha} \varphi(x) dx, \quad (1.3.4)$$

avec :

- q_α : Le quantile de la densité gaussienne centrée et réduite d'ordre α .
- $\varphi(x)$: la densité gaussien centré réduite

ce qui implique :

$$VaR_\alpha = -\langle X \rangle + \widetilde{VaR}_\alpha \cdot \sigma_X \quad (1.3.5)$$

or, d'après les résultats de Johnson et al (1994), nous avons :

$$\widetilde{VaR}_\alpha = q_\alpha + \left[\frac{1}{6} (q_\alpha^2 - 1) c_3 + \frac{1}{24} q_\alpha (q_\alpha^2 - 3) c_4 \right] \quad (1.3.6)$$

ce qui implique :

$$VaR_\alpha = -\langle X \rangle + \left(q_\alpha + \left[\frac{1}{6} (q_\alpha^2 - 1) c_3 + \frac{1}{24} q_\alpha (q_\alpha^2 - 3) c_4 \right] \right) \cdot \sigma_X. \quad (1.3.7)$$

avec $\langle . \rangle$: espérance mathématique.

Cette approximation de la VaR d'une distribution quelconque par les moments de la distribution à question reste une piste intéressante lorsqu'il est difficile de déterminer la distribution de probabilité de X .

Tableau 2-3 – VaR fondée sur les moments d'ordre élevés VaR_M

Indices	VaR_M 95%	VaR_M 99%
CAC 40	-0.0239	-0.0567
DAX	-0.0261	-0.0573
FTSE 100	-0.0194	-0.0509
NIKKEI	-0.0225	-0.0596
NASDAQ	-0.0305	-0.0660

Les résultats du tableau 2-3, nous permettent de constater que cette mesure du risque fondée sur les moments d'ordres élevés est supérieure à la VaR historique et les VaR calculées sous l'hypothèse de normalité de la distribution. Selon cette mesure, l'indice *NASDAQ* est le plus risqué et l'ordre de risque des indices est similaire à celui des autres mesures traditionnelles. Ce qui implique que la prise en compte des moments d'ordres élevés dans le calcul des risques des indices boursiers ne sous-estime pas les risques des différents indices contrairement aux mesures de risque fondées sur l'hypothèse de la gaussianité des séries.

1.3.4 Adéquation de la queue de distribution avec une GPD, VaR_{GPD} et l'Expected Shortfall (VaR conditionnelle)

1.3.4.1 Adéquation de la queue de distribution avec une GPD et estimation de la VaR

On trouve dans la littérature deux méthodes d'estimation des distributions au-dessus d'un seuil. Une première méthode est fondée sur l'estimateur de Hill (voir Beirlant et al. (1996), Mills (1999)). Une deuxième méthode repose sur une modélisation des queues par une distribution de Pareto généralisée (GPD).

Soit F la distribution des excès d'une variable aléatoire X au dessus d'un seuil u et soit x_F la plus grande valeur située dans la queue positive. La distribution F est définie par :

$$F_u(x) = \mathbb{P}(X - u \leq x | X > u) = \frac{F(x+u) - F(u)}{1 - F(u)}, \quad (1.3.8)$$

avec

$$0 < x < x_F - u.$$

Le théorème de Balkema et Haan (1974) et de Pickands (1975) montre que lorsque le seuil u tend vers x_F , la loi limite de la distribution des excès F est une GPD donnée par :

$$G_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \xi \frac{x}{\beta})^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta) & \xi = 0. \end{cases}$$

Le théorème de Balkema et Haan (1974) et de Pickands (1975) suggère, aussi, que pour un seuil u suffisamment élevé, la distribution des excès peut être approchée par $G_{\xi,\beta}(x)$. Cependant, le choix du seuil u constitue une grande difficulté. Le choix d'un seuil suffisamment élevé permettra de réduire le biais entraîné par l'application d'un théorème asymptotique. En revanche, le choix d'un seuil très grand renvoie à un problème d'inférence statistique car il réduira le nombre d'observations utilisées dans l'estimation des paramètres. On trouve dans la littérature quelques méthodes de sélection du seuil u telles que la méthode QQ-Plot et la Mean Excess Plot (voir Embrechts et al.(1997) et Coles (2001)).

Avec un seuil u suffisamment élevé, la $VaR_{GPD,\alpha}(X)$ pour un échantillon X de taille n est obtenue par l'inversion de l'estimateur de queue :

$$\widehat{VaR}_{GPD,\alpha}(X) = u + \frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\xi}} \left(\left(\frac{n}{N_u} (1 - \alpha) \right)^{-\widehat{\xi}} - 1 \right)$$

pour

$$VaR_{GPD,\alpha}(X) > u, \quad \text{comme} \quad N_u = \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i > u\}}.$$

1.3.4.2 L'Expected Shortfall (VaR conditionnelle)

Définition :

Pour un niveau de confiance donné α , l'expected shortfall est défini comme suit :

$$\begin{aligned} ES_\alpha &= \langle X | X > VaR_\alpha(X) \rangle \\ &= VaR_\alpha(X) + e_x(VaR_\alpha(X)), \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

avec e_x est l'excès de perte moyen (Mean Excess Function) donné par :

$$e_x = \langle X - u | X > u \rangle.$$

Dans le cas d'une variable aléatoire X suivant une loi de Pareto généralisée de paramètres de forme $\xi < 1$ et d'échelle β , la Mean Excess Function e_x est une fonction linéaire en u et définie par :

$$\frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}, \quad \beta + \xi u > 0.$$

Sous l'hypothèse que les excès $X - u$, pour toutes les observations $X > u$, suivent une GPD, on peut écrire l'Expected Shortfall en fonction de la $VaR_{GPD,\alpha}$ et des estimateurs des paramètres de la GPD :

$$ES_\alpha = VaR_{GPD,\alpha}(X) + \frac{\beta - \xi (VaR_{GPD,\alpha}(X) - u)}{1 - \xi} \quad (1.3.10)$$

$$= \frac{VaR_{GPD,\alpha}(X)}{1 - \xi} + \frac{\beta - \xi u}{1 - \xi}. \quad (1.3.11)$$

L'expected shortfall contrairement à la VaR est sous additive. La seule condition que cette mesure soit définie est l'existence d'une moyenne finie des pertes qui se situent au-delà du seuil u . Dans le cas d'une GPD, cette condition est vérifiée si l'indice de

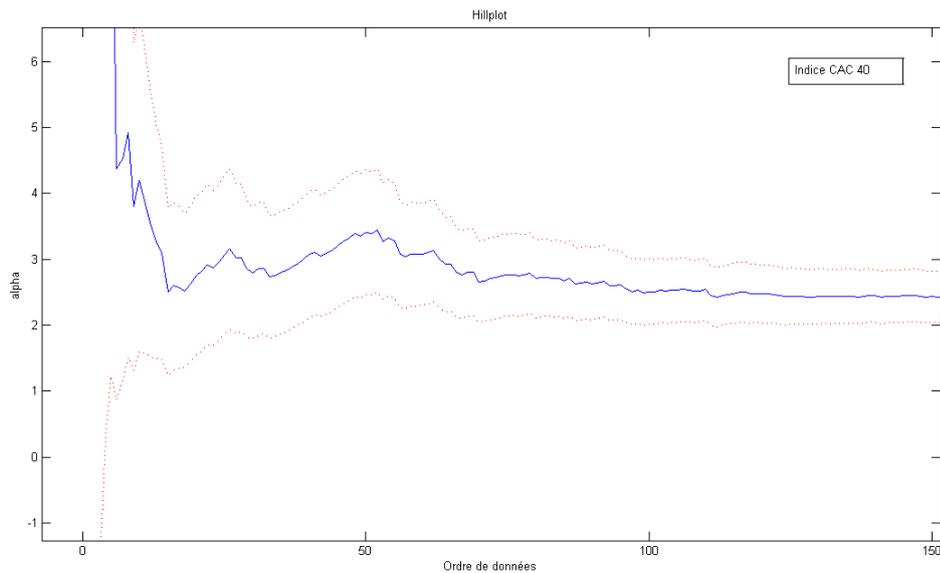
queue ξ est inférieur à 1. Par ailleurs, cette mesure du risque peut être réconciliée avec la théorie de la maximisation de l'utilité espérée. En effet, pour toute fonction d'utilité concave U , Levy et Kroll (1978) ont montré que :

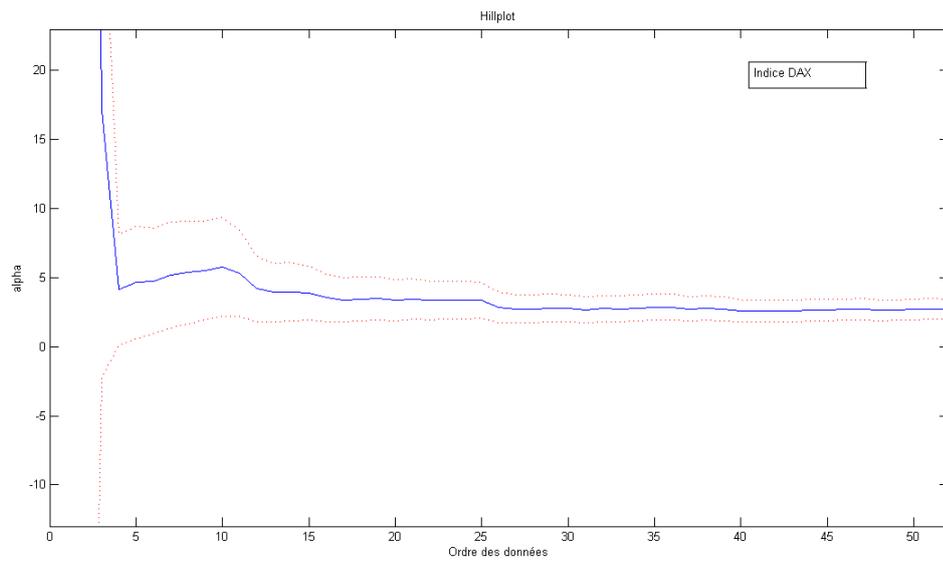
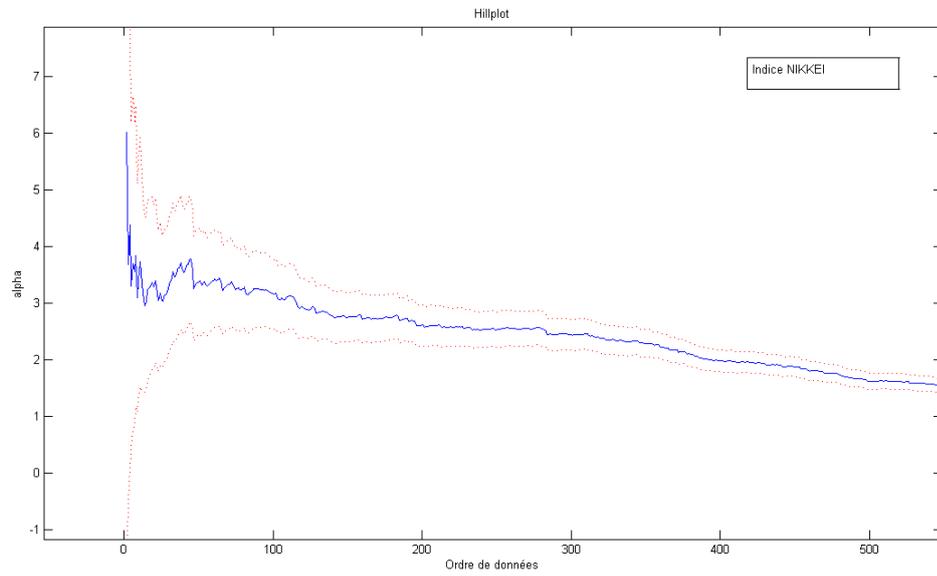
$$\langle U(-X) \rangle \geq \langle U(-Y) \rangle \iff ES_\alpha(X) \leq ES_\alpha(Y),$$

avec X et Y des variables aléatoires représentant des pertes.

Nous présentons la Figure 2.1 pour avoir une première indication sur l'indice de queue α et par conséquent l'ordre k , $k = \text{cardinal}(i : X_{i,n} > u, i = 1, \dots, n)$ du seuil u à partir duquel commence la queue de la distribution.

Nous avons utilisé la méthode de maximum de vraisemblance pour estimer les paramètres de la loi *GPD*.





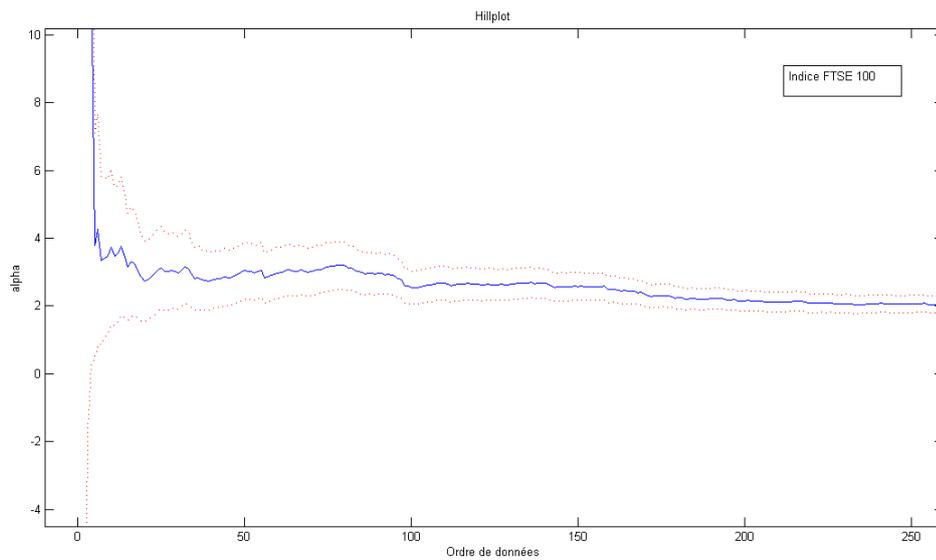
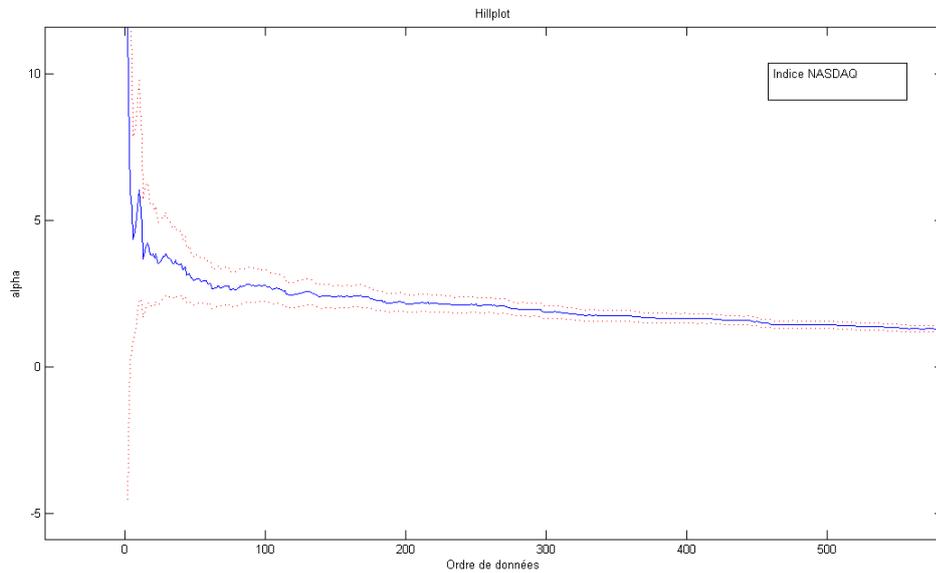


Figure 2.1 – Estimation des queues de distribution des indices boursiers

La Figure 2.1 montre que $\tilde{\alpha}$ est toujours très élevé pour la plupart des indices boursiers, ce qui nous amène à conclure que la queue de distribution est très épaisse et que la fréquence des rendements extrêmes est par conséquent élevée.

Les résultats d'estimation des paramètres de la GPD et les calculs de la VaR_{GPD} et l'ES pour les différents indices boursiers sont présentés dans le tableau 2-4 pour un seuil égal à 5% et dans le tableau 2-5 pour un seuil égal à 1%.

Tableau 2-4 – Estimation GPD, VaR_{GPD} et ES, seuil 5%

Indices	Seuil u	[Shape, Scale]	VaR_{GPD}	ES
CAC 40	0.0247	[-0.2316,0.0308]	0.0411	0.0537
DAX	0.0261	[-0.2408,0.0331]	0.0437	0.0569
FTSE 100	0.0200	[-0.2138,0.0249]	0.0343	0.0453
NIKKEI	0.0246	[-0.1845,0.0297]	0.0429	0.0574
NASDAQ	0.0318	[-0.2361,0.0394]	0.0518	0.0677

Tableau 2-5 – Estimation GPD , VaR_{GPD} et ES, seuil 1%

Indices	Seuil u	[Shape, Scale]	VaR_{GPD}	ES
CAC 40	0.0247	[-0.2316,0.0308]	0.0620	0.0707
DAX	0.0261	[-0.2408,0.0331]	0.0606	0.0744
FTSE 100	0.0200	[-0.2138,0.0249]	0.0524	0.0602
NIKKEI	0.0246	[-0.1845,0.0297]	0.0669	0.0777
NASDAQ	0.0318	[-0.2361,0.0394]	0.0781	0.0890

Nous constatons que la VaR calculée sous l'hypothèse que les excès $VaR - u(u > u_0)$, suivent une $GPD_{\xi,\beta}$ est croissante en fonction du niveau de confiance ainsi que la VaR conditionnelle (Expected Shortfall) l'en ai aussi. L'estimation des paramètres de la GPD cause des problèmes de la détermination du seuil u_0 . Ce seuil doit être suffisamment grand pour que les excès suivent une $GPD_{\xi,\beta}$ toutefois, il ne doit pas être trop grand afin d'avoir suffisamment des données pour obtenir des estimateurs de bonne qualité ; il s'agit d'un arbitrage pour que la queue ne soit entamée ni par des valeurs centrales ni par des valeurs fortement extrêmes. Généralement u_0 est déterminé en utilisant un graphique appelé 'Mean Excess plot' ou 'Mean residual

life plot' et en exploitant le résultat suivant :

$$e(u_0) = \langle VaR - u_0 | VaR > u_0 \rangle = \frac{\beta + \xi u}{1 - \xi}.$$

La théorie des valeurs extrêmes apparaît indispensable pour compléter la palette des outils traditionnels de mesure du risque. L'analyse de ces résultats révèle que le paramètre ξ est négatif et il est plus élevé en valeur absolue pour l'indice DAX. Plus cet indice est élevé en valeur absolue, plus le poids des extrêmes dans la distribution initiale est important. Le paramètre ξ est différent de zéro pour toutes les indices. Ces constatations indiquent que les queues de distributions de rentabilité à gauche sont épaisses, c'est-à-dire que la probabilité d'occurrence de pertes est plus élevée que ce que prévoit la loi normale. Cette information indique à l'investisseur que si son estimation d'une augmentation journalières importante des rendements est plus probable que ce que prévoit la loi normale, elle s'accompagne également d'un risque de pertes extrêmes plus marqué.

On peut dire que la mesure VaR_{GPD} est plus pertinente, car elle fait intervenir un plus grand nombre de points dans les calculs. En effet, la VaR historique ne tient compte que d'une seule donnée, à savoir la plus grande perte, alors que la théorie des extrêmes prend en compte toutes les valeurs supérieures au seuil. Nous pouvons donc conclure que la VaR_{GPD} et l'ES sont des mesures plus robustes. Les résultats ont montré que les mesures de risque traditionnels pour le calcul du risque, construits sur l'hypothèse de normalité de la distribution, sous estiment le risque de perte. En effet, il apparaît, que ces VaR et la VaR fondée sur les moments d'ordres élevés sont inférieurs à la VaR_{GPD} et à l'ES.

Toutefois, toutes ces mesures de risque qu'on vient de citer à cette section présentent un inconvénient puisqu'elles ne tiennent pas compte de la fonction d'aversion au risque de l'investisseur et de ses préférences. Une autre approche consiste à définir une mesure qui regroupe en même temps les caractéristiques de la distribution de rentabilité et de la fonction d'aversion au risque.

Dans ce qui suit, nous allons déterminer théoriquement des mesures de risque fondées sur les fonctions d'utilité de l'investisseur et qui tiennent compte des mo-

ments d'ordre trois pour étudier le phénomène de kurtosis et le moment d'ordre quatre qui donne une idée sur le phénomène leptokurtique. Selmi et Bellalah (2001) utilisent des fonctions d'utilité cubique et exponentielle négative afin de déterminer des mesures de risque fondées sur un programme de maximisation de l'utilité espérée. En revanche, cette mesure du risque ne peut être appliquée que pour des fonctions d'utilité bien définies. Plus précisément, l'application de cette mesure à une fonction de type isoélastique conduit à une mesure nulle. Notre objectif est de déterminer une mesure de risque générale pour les différentes fonction d'utilité telles que la fonction d'utilité exponentielle négative, la fonction d'utilité isoélastique et la fonction d'utilité Hyperbolique. Cette mesure de risque tient compte à la fois de l'attitude de l'investisseur vis-à-vis du risque et des moments d'ordre trois et quatre.

1.4 Une mesure du risque déduite de la fonction d'utilité

La deuxième partie de ce chapitre aborde d'emblée l'une des principales questions de la thèse, à savoir déterminer une mesure du risque en faisant appel à la fonction d'utilité de l'investisseur. Plus précisément, nous faisons appel à l'approche de l'utilité espérée : l'approche de la maximisation de l'utilité espérée. On va étudier la possibilité de prendre en compte les moments d'ordre élevés dans le critère de l'optimisation de l'utilité espérée pour définir une mesure du risque.

1.4.1 L'approche de l'utilité espérée

1.4.1.1 Présentation de l'approche

On considère que chaque agent possède à l'instant t une richesse initiale W et une fonction d'utilité de *von – Neumann – Morgenstern* strictement croissante et concave. On suppose de plus que la fonction d'utilité de l'investisseur est continûment différentiable et vérifié les quatre propriétés suivantes :

$$U^{(1)} > 0, \quad U^{(2)} < 0, \quad U^{(3)} > 0, \quad U^{(4)} < 0.$$

avec $U^{(i)}$ la dérivée i -ème de la fonction d'utilité.

Sous ces hypothèses, la fonction d'utilité peut être développée en série de Taylor au voisinage de la richesse future espérée $\langle W \rangle$:

$$U(W) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} U^{(i)}(\langle W \rangle) \langle (W - \langle W \rangle)^i \rangle + \xi_{n+1}(W), \quad (1.4.1)$$

où $\xi_{n+1}(W)$ le reste définit comme suit :

$$\xi_{n+1}(W) = \frac{U^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!} [W - \langle W \rangle]^{(n+1)},$$

avec :

$$\zeta \in]W, \langle W \rangle [\text{ si } W < \langle W \rangle \text{ ou } \zeta \in] \langle W \rangle, W [\text{ si } W > \langle W \rangle \text{ et } n \in N^*$$

Si on suppose, de plus, que l'approximation de Taylor de U au voisinage de $\langle W \rangle$ est convergente et la distribution de $F(W)$ est déterminé uniquement par ses moments. On tend n vers l'infini de la valeur espérée de l'équation 1.4.1, on obtient :

$$\langle U(W) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} U^{(i)}(\langle W \rangle) \langle (W - \langle W \rangle)^i \rangle + \xi_{n+1}(W) \right] \right\} dF(W), \quad (1.4.2)$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned} \langle U(W) \rangle &= U(\langle W \rangle) + \frac{1}{2} U^{(2)}(\langle W \rangle) \langle (W - \langle W \rangle)^2 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{3!} U^{(3)}(\langle W \rangle) \langle (W - \langle W \rangle)^3 \rangle \\ &\quad + \frac{1}{4!} U^{(4)}(\langle W \rangle) \langle (W - \langle W \rangle)^4 \rangle \\ &\quad + \sum_{i=5}^n \frac{1}{i!} U^{(i)}(\langle W \rangle) \langle (W - \langle W \rangle)^i \rangle \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

avec

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_{n+1}(W) = 0.$$

Soient $\sigma^2 = \langle (W - \langle W \rangle)^2 \rangle$, $\lambda_3 = \langle (W - \langle W \rangle)^3 \rangle$ et $\lambda_4 = \langle (W - \langle W \rangle)^4 \rangle$ respectivement la variance, le moment d'ordre trois et le moment d'ordre quatre. L'équation 1.4.3 devient :

$$\langle U(W) \rangle = U(\langle W \rangle) + \frac{1}{2} U^{(2)}(\langle W \rangle) \sigma^2 + \frac{1}{3!} U^{(3)}(\langle W \rangle) \lambda_3 + \frac{1}{4!} U^{(4)}(\langle W \rangle) \lambda_4$$

$$+ \sum_{i=5}^n \frac{1}{i!} U^{(i)}(\langle W \rangle) \langle (W - \langle W \rangle)^i \rangle. \quad (1.4.4)$$

Cette équation prend en compte tous les moments centrés de la distribution de probabilité de la richesse aléatoire, plus précisément, les moments d'ordre trois *skewness* et quatre *kurtosis*, contrairement aux modèles traditionnels, tels que le modèle de *Markowitz* qui ne considère que les deux premiers moments, l'espérance et la variance. Elle montre que l'investisseur a une préférence pour l'espérance et l'asymétrie (positive) et une aversion pour la variance et la kurtosis.

1.4.1.2 Justifications de l'approche de l'utilité espérée

Cette approche peut être justifiée par deux raisons. D'une part, l'approche moyenne variance de *Markowitz* suppose que la densité de probabilité de la richesse est une gaussienne, c'est-à-dire elle est parfaitement définie par ses deux premiers moments la moyenne et la variance. Or, plusieurs travaux empiriques ont montré que la moyenne et la variance ne suffisent pas à définir entièrement la distribution de probabilité. En ce sens, de nombreuses travaux proposent d'autres formes de la densité de probabilité que la gaussienne. Par exemple, Simaan (1993) a proposé une distribution non-sphérique, Adcock et Shutes (1999) supposent que les rendements de l'actif financier suivent une distribution Skew-Normale multivariée, Rachev et Mitnik (2000) ont défini une distribution de type Levy-Pareto stable, etc. Pour cette raison, il est nécessaire de travailler avec l'approche de l'utilité espérée tronquée à l'ordre quatre qui tient compte des quatre premiers moments. D'autre part, si on considère des fonctions d'utilités particulières. A titre d'exemple, si on suppose que les préférences de l'investisseur sont représentées par une fonction d'utilité quadratique de la forme⁹ :

$$U(W) = \alpha_0 + \alpha_1 W + \alpha_2 W^2 + \alpha_3 W^3 + \alpha_4 W^4, \quad (1.4.5)$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}^*$, $i = 1, 2, 3, 4$.

En appliquant l'espérance mathématique, on obtient :

9. Voir Emmanuel Jurczenko et Bertrand Maillet (2006)

$$\langle U(W) \rangle = \alpha_0 + \alpha_1 \langle W \rangle + \alpha_2 \langle W^2 \rangle + \alpha_3 \langle W^3 \rangle + \alpha_4 \langle W^4 \rangle. \quad (1.4.6)$$

Or¹⁰ :

$$\begin{cases} \langle W^2 \rangle = \sigma^2(W) + \langle W \rangle^2 \\ \langle W^3 \rangle = \lambda_3(W) + 3 \langle W \rangle \sigma^2(W) + \langle W \rangle^3 \\ \langle W^4 \rangle = \lambda_4(W) + 4 \langle W \rangle \lambda_3(W) + 6 \langle W \rangle^2 \sigma^2(W) + \langle W \rangle^4. \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \langle U(W) \rangle &= \alpha_0 + \alpha_1 \langle W \rangle + \alpha_2 \langle W^2 \rangle + \alpha_3 \langle W^3 \rangle + \alpha_4 \langle W^4 \rangle \\ &\quad + [\alpha_2 + 3\alpha_3 \langle W \rangle + 6\alpha_4 \langle W \rangle^2] \sigma^2(W) \\ &\quad + [\alpha_3 + 3\alpha_4 \langle W \rangle] \lambda_3(W) + \alpha_4 \lambda_4(W). \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Il reste maintenant à vérifier la dominance stochastique de cette fonction d'utilité. C'est-à-dire

$$U^{(1)} > 0, \quad U^{(2)} < 0, \quad U^{(3)} > 0, \quad U^{(4)} < 0.$$

Les quatre premières dérivées de l'équation 1.4.6 sont :

$$\begin{cases} U^{(1)} = \alpha_1 + 2\alpha_2 W + 3\alpha_3 W^2 + 4\alpha_4 W^3 \\ U^{(2)} = 2\alpha_2 + 6\alpha_3 W + 12\alpha_4 W^2 \\ U^{(3)} = 6\alpha_3 + 24\alpha_4 W \\ U^{(4)} = 24\alpha_4. \end{cases}$$

Or, on sait que $U^{(3)} > 0$ et $U^{(4)} < 0$, ce qui donne :

$$\begin{cases} \alpha_3 > 0, \\ W < -\left(\frac{\alpha_3}{4\alpha_4}\right), \\ \alpha_4 < 0. \end{cases}$$

On remarque bien que la dérivée seconde la fonction d'utilité est une simple équation de seconde degrés qui doit vérifier ces deux conditions¹¹ :

10. cf Kendall,1977, page 54

11. La résolution de cette équation dépend de signe de Δ . Dans un premier temps on suppose que Δ est négatif donc la signe de l'équation est la même que α_4 qui est négative et en seconde temps on suppose que Δ est positif ce qui nous permet de déterminer les conditions sur les différentes paramètres.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 < \frac{3\alpha_3^2}{8\alpha_4} \quad \text{si } \Delta > 0, \\ W < -\left(\frac{\alpha_3}{4\alpha_4}\right) + \frac{\sqrt{(9\alpha_3^2 - 24\alpha_2\alpha_4)}}{12\alpha_4}, \\ W > -\left(\frac{\alpha_3}{4\alpha_4}\right) - \frac{\sqrt{(9\alpha_3^2 - 24\alpha_2\alpha_4)}}{12\alpha_4}, \\ 0 > \alpha_2 \geq \frac{3\alpha_3^2}{8\alpha_4} \quad \text{si } \Delta < 0. \end{array} \right.$$

Il reste maintenant à vérifier que la dérivée première de la fonction d'utilité quartique est positive. On remarque que la dérivée première est une simple équation de troisième degré qui doit vérifier, après un calcul simple mais très long, ces trois conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 > 0, \\ \left(-\frac{\alpha_3^2}{16\alpha_4^2} + \frac{\alpha_2}{6\alpha_4}\right)^3 + \left(\frac{\alpha_3^3}{16\alpha_4^3} - \frac{\alpha_2\alpha_3}{16\alpha_4^2} + \frac{\alpha_1}{8\alpha_4}\right)^2 > 0, \\ W < -\left(\frac{\alpha_3}{4\alpha_4}\right) + \frac{A^2 + (9\alpha_3^2 - 24\alpha_2\alpha_4)}{12\alpha_4 A}, \\ A = \left(\frac{B + \sqrt{-108(3\alpha_3^2 - 8\alpha_4\alpha_2)^3 + B^2}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, \\ B = (-54\alpha_3^3 - 432\alpha_2^2\alpha_1 + 216\alpha_4\alpha_3\alpha_2). \end{array} \right.$$

Si les préférences de l'investisseur sont présentées par une fonction d'utilité quartique, il est aisé de vérifier que l'agent a une préférence pour l'espérance et l'asymétrie et une aversion pour la variance et la kurtosis.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \langle U(W) \rangle}{\partial \langle W \rangle} = \alpha_1 + 2\alpha_2 \langle W \rangle + 3\alpha_3 \langle W^2 \rangle + 4\alpha_4 [\langle W^3 \rangle + \langle W \rangle^3] > 0, \\ \frac{\partial \langle U(W) \rangle}{\partial \sigma^2(W)} = \alpha_2 + 3\alpha_3 \langle W \rangle + 6\alpha_4 \langle W \rangle^2 < 0, \\ \frac{\partial \langle U(W) \rangle}{\partial \lambda_3(W)} = \alpha_3 + 3\alpha_4 \langle W \rangle > 0, \\ \frac{\partial \langle U(W) \rangle}{\partial \lambda_4(W)} = \alpha_4 < 0. \end{array} \right.$$

1.4.2 Les mesures du risque et les fonctions d'utilité

1.4.2.1 Une mesure du risque au sens de Jia et Dyer (1996)

Jia et Dyer (1996) proposent une mesure du risque cohérente avec la théorie de l'utilité. Plus précisément, ils montrent qu'il existe une relation négative entre les préférences de l'investisseur et le risque. Dans cette paragraphe, on va présenter cette mesure du risque *pur* au sens de Jia et Dyer.

Définition 1.4.1 Soit P un ensemble convexe de tous les distribution de probabilités ou de l'ensemble de loteries $\{X, Y, Z, \dots\}$. On définit par P^0 ¹², l'ensemble de distributions de probabilité normaux, qui est un sous ensemble de P défini par :

$$P^0 = \{X' \mid X' = X - \langle X \rangle, X \in P\}.$$

On appelle P^0 l'ensemble du risque de la distribution de probabilité et X' le risque standard de la loterie X .

Définition 1.4.2 Soient $X', Y' \in P^0$, on dit $X' >_R Y'$ si seulement si $Y' >_P X'$. On désigne par $>_R$ une relation binaire de risque et $>_P$ une relation binaire de préférence dans P^0 .

Il est important de noter que si la relation de préférence $>_P$ satisfait les axiomes de l'utilité espérée de von Neumann-Morgenstern (1947) alors les préférences peuvent être représentées par une fonction d'utilité espérée.

Théorème 1 Quel que soit $X', Y' \in P^0$, $X' >_R Y'$ si seulement si $\mathcal{R}(X') > \mathcal{R}(Y')$, où $\mathcal{R}(X')$ est une mesure du risque :

$$\mathcal{R}(X') = - \langle U(X - \langle X \rangle) \rangle, \quad (1.4.8)$$

et U est une fonction d'utilité de von Neumann-Morgenstern (1947).

Remarque 1 Cette mesure du risque est dite générale car elle n'impose aucune restriction ni sur la forme de la distribution de probabilité ni sur la fonction d'utilité de la loterie.

12. Il est aisé de montrer que l'ensemble P^0 est un ensemble convexe si l'ensemble de P est un ensemble convexe

D'après ce théorème, Jia et Dyer supposent qu'il existe une relation négative entre les préférence de l'investisseur mesuré par $\langle U(X - \langle X \rangle) \rangle$ et la mesure de risque note \mathcal{R} . Ils suppose, en plus, que cette mesure du risque doit vérifier deux conditions nécessaires. La première concerne les dérivées c'est-à-dire, il faut que $U^{(2n)} < 0$ et $U^{(2n+1)} > 0$. En d'autre terme, la fonction d'utilité doit vérifier la dominance stochastique d'ordre n . La deuxième concerne l'aversion au risque de l'investisseur, c'est-à-dire il préfère les moments d'ordre paire et déteste les moments d'ordre impaire. Ce résultat est très connu, en effet, Markowitz (1952)¹³ montre qu'un individu possède une fonction d'utilité concave pour des valeurs faibles de la loterie et convexe pour des valeurs élevées de la loterie, préfère la moyenne et la skewness c'est-à-dire il préfère les distributions asymétriques du côté droite (gain) et déteste la variance et le kurtosis c'est-à-dire les distributions asymétriques du côté gauche (perte).

Un autre point qui est très important à le signalé. On remarque que la mesure du risque définie par l'équation 1.4.8 est appliquée à la variable centrée $X - \langle X \rangle$. Ils supposent que si on joue une fois à la loterie, l'espérance $\langle X \rangle$ peut servir comme une valeur de préférence. Dans ce cas, $\tilde{X} = X - \langle X \rangle$ est une loterie centrée qui reflète le risque *pur* de la loterie origine X .

On va donner maintenant des exemples de mesures du risque pour quelques fonctions d'utilité.

La fonction d'utilité exponentielle

Si les préférences de l'investisseur sont représentées par une fonction d'utilité exponentielle de la forme :

$$U(X) = -e^{-\beta X},$$

avec $\beta > 0$.

Selon Jia et Dyer, la mesure du risque correspondante à cette fonction est donnée par :

$$\mathcal{R} = -\langle U(\tilde{X}) \rangle = -\langle U(X - \langle X \rangle) \rangle = \langle e^{-\beta(X - \langle X \rangle)} \rangle.$$

13. Voir aussi Scott et Horvath,(1980) et Kimball (1993) qui prouvent le même résultat que Markowitz

Cette mesure du risque est confondue avec celle de *Bell* (1988) pour une fonction d'utilité exponentielle plus une fonction linéaire de la forme :

$$U(X) = aX - b e^{(-cX)},$$

avec $a \geq 0$, $b > 0$ et $c > 0$.

La fonction d'utilité quadratique

Si les préférences de l'investisseur sont spécifiées par une fonction d'utilité quadratique de la forme :

$$U(X) = \alpha X - \beta X^2,$$

avec $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. La mesure du risque correspondante à cette fonction d'utilité selon le technique de Jia et Dyer :

$$\mathcal{R}(\tilde{X}) = \beta \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle.$$

Remarque 2 *C'est ne rien autre que la variance de X . Ce résultat coïncide avec celle de l'approche moyenne-variance de Markowitz.*

Les fonctions d'utilités quadratique posent deux problème. Le premier tient au fait que ces fonctions sont décroissantes au-delà d'une certaine valeur de $\tilde{X} > \frac{\alpha}{2\beta}$. Et le second problème tient au fait qu'elles sont caractérisées par une fonction d'aversion au risque croissante. Une manière pour pallier de cet inconvénient, Levy (1969) a proposé une fonction d'utilité cubique de la forme :

$$U(X) = \alpha X - \beta X^2 + \gamma X^3,$$

avec α , β , et γ sont des paramètres constants positifs.

Remarque 3 *Il faut noter que les choix de paramètres α , β , et γ n'est pas arbitraire. Par exemple, pour que cette fonction soit croissante il faut que $\beta^2 < 3\alpha\gamma$ et pour assurer la concavité il faut que $X < \frac{\beta}{3\gamma}$.*

La mesure du risque, si les préférences de l'investisseur sont représentées par une fonction d'utilité négative, selon l'équation 1.4.8 est :

$$\mathcal{R} = \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle - \gamma' \langle (X - \langle X \rangle)^3 \rangle,$$

avec $\gamma' = \frac{\gamma}{\beta} > 0$.

On remarque que cette mesure du risque est une combinaison linéaire de moment d'ordre deux (la variance) et le moment d'ordre trois (la skewness). Ce dernier permet de donner une bonne idée sur l'asymétrie de la distribution de X . Il est clair que cette mesure du risque est une fonction décroissante de la dissymétrie (puisque $\gamma' = \frac{\gamma}{\beta} > 0$). En d'autres termes, une transformation du poids vers la partie droite de la distribution (c'est-à-dire côte de gain) fait baisser le risque.

La fonction d'utilité quartique

On suppose maintenant que les préférences de l'investisseur sont représentées par une fonction d'utilité quartique de la forme :

$$U(X) = \alpha X - \beta X^2 + \gamma X^3 - \delta X^4,$$

avec $\alpha > 0$, $\beta < 0$, $\gamma > 0$ et $\delta < 0$ ¹⁴. En appliquant l'équation (1.4.8) à cette fonction d'utilité, on obtient :

$$\mathcal{R} = \beta \langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle - \gamma \langle (X - \langle X \rangle)^3 \rangle + \delta \langle (X - \langle X \rangle)^4 \rangle.$$

On remarque que cette mesure du risque est une combinaison linéaire de moment d'ordre deux (la variance), le moment d'ordre trois (la skewness) et de moment d'ordre quatre (la kurtosis). On voit bien que cette mesure du risque dépend négativement de la skewness et positivement de la kurtosis, comme il se doit. Ceci renforce l'intuition selon laquelle le risque est en réalité lié d'une part à la perte et non au gain, d'autre part lié aux grandes fluctuations qu'aux petites fluctuations.

¹⁴. Voir la section précédente pour plus de détails.

1.4.2.2 La maximisation de l'utilité espérée conduit-elle à une mesure du risque ?

Selmi et Bellalah (2002) déterminent une mesure du risque en faisant appel à l'approche de l'utilité espérée. Ils utilisent des fonctions d'utilité cubique et exponentielle négative pour tester leur approche. En revanche, cette mesure du risque ne peut être appliquée que pour des fonctions d'utilité bien définies. Plus précisément, l'application de leur mesure à une fonction de type isoélastique conduit à une mesure du risque nulle, qui est trop loin de la réalité. Dans cette section, on va déterminer une mesure du risque applicable à n'importe quelle fonction d'utilité.

Notre approche consiste à utiliser la technique de Jia et Dyer (1996) mais en faisant appel à l'approximation de Taylor tronquée à l'ordre quatre. Pour illustrer nos résultats, nous utilisons les fonctions d'utilité exponentielle négative, les fonctions d'utilité isoélastique ou utilités CRRA (constant relative risk aversion) et hyperbolique ou utilités HARA (Hyperbolic absolute risk aversion).

Le cadre général

On suppose que la fonction d'utilité de *von-Neumann-Morgenstern* strictement croissante, concave et au moins quatre fois dérivable. On suppose de plus que la distribution de probabilité de W est entièrement déterminé par ses moments. Il est important de noter que la fonction d'utilité doit vérifier ces quatre propriétés :

$$U^{(1)} > 0, \quad U^{(2)} < 0, \quad U^{(3)} > 0, \quad U^{(4)} < 0,$$

avec $U^{(i)}$ la dérivée i -ème de la fonction d'utilité.

Sous ces hypothèses, l'espérance mathématique appliquée à la série de Taylor, tronquée à l'ordre quatre¹⁵, au voisinage de $\langle W \rangle$ conduit à l'approximation suivante :

$$\langle U(W) \rangle = U(\langle W \rangle) + \frac{\sigma^2}{2} U^{(2)}(\langle W \rangle) + \frac{\lambda_3}{3!} U^{(3)}(\langle W \rangle) + \frac{\lambda_4}{4!} U^{(4)}(\langle W \rangle), \quad (1.4.9)$$

où σ^2 , λ_3 et λ_4 sont respectivement la variance, le skewness et la kurtosis.

15. Pour tenir compte de moments d'ordre trois (skewness) et d'ordre quatre (kurtosis)

La maximisation de l'utilité espérée appliqué à la richesse finale, $\langle U(W) \rangle$, est équivalente à la maximisation de la quantité suivante :

$$U(\langle W \rangle) + \frac{\sigma^2}{2} U^{(2)}(\langle W \rangle) + \frac{\lambda_3}{3!} U^{(3)}(\langle W \rangle) + \frac{\lambda_4}{4!} U^{(4)}(\langle W \rangle).$$

Théorème 2 On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Soit Γ un ensemble des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$. Une variable aléatoire $X \in \Gamma$ est identifiée au revenu futur d'un acte donné.

On se place dans le cadre de l'hypothèse de l'espérance d'utilité. Un agent forme des choix sur l'ensemble Γ selon le critère suivant : X est préféré à Y , noté $X \succ Y$, si seulement si

$$\langle U(X) \rangle \geq \langle U(Y) \rangle,$$

où $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction d'utilité strictement croissante et concave.

Selon ce théorème, la loterie X est moins risquée que Y (ayant la même espérance mathématique) implique :

$$\frac{1}{2} (\sigma_X^2 - \sigma_Y^2) U^{(2)}(\langle W \rangle) + \frac{1}{3!} (\lambda_3^X - \lambda_3^Y) U^{(3)}(\langle W \rangle) + \frac{1}{4!} (\lambda_4^X - \lambda_4^Y) U^{(4)}(\langle W \rangle) > 0.$$

Ce qui revient à tenir la quantité suivante comme une mesure du risque noté \mathcal{R} :

$$\mathcal{R} = -\sigma^2 U^{(2)}(\langle W \rangle) - \frac{1}{3} \lambda_3 U^{(3)}(\langle W \rangle) - \frac{1}{12} \lambda_4 U^{(4)}(\langle W \rangle), \quad (1.4.10)$$

Cette mesure du risque est cohérente avec celui de Markowitz (1952), Scott et Horvath's (1980) qui montrent qu'un investisseur rationnels préfèrent les moments impaires et déteste les moments pairs. En effet,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \sigma^2} = -U^{(2)}(\langle W \rangle) > 0, \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda_3} = -U^{(3)}(\langle W \rangle) < 0, \\ \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \lambda_4} = -U^{(4)}(\langle W \rangle) > 0. \end{array} \right.$$

En réalité cette mesure du risque coïncide avec celle de *Jia et Dyer* (1996). Selon ces derniers, si on joue une fois à la loterie, l'espérance $\langle W \rangle$ peut servir comme une

valeur de référence. Dans ce cas, $\widetilde{W} = W - \langle W \rangle$ est une loterie centrée qui reflète le risque pur. Sous cette condition, la mesure du risque \mathcal{R} définie par l'équation 1.4.10 devient :

$$\mathcal{R} = -\sigma^2 U^{(2)}(0) - \frac{1}{3} \lambda_3 U^{(3)}(0) - \frac{1}{12} \lambda_4 U^{(4)}(0). \quad (1.4.11)$$

Cette mesure du risque qui intègre en plus de la variance, le moment d'ordre trois qui donne un idée sur l'asymétrie de la réalisation de la variable étudiée et le moment d'ordre quatre qui donne une bonne idée de l'ampleur des queues de distribution.

Cette mesure du risque présente un majeur défaut. En effet, on ne peut pas l'appliquer avec toutes les fonctions d'utilité. A titre d'exemple, l'application de l'équation 1.4.11, à la fonction d'utilité isoélastique donne une mesure du risque nulle, ce qui n'est pas logique. Pour cette raison, on considère, dans ce travail, la mesure du risque définie par l'équation 1.4.10 comme une mesure du risque *générale* pour toutes les fonctions d'utilité.

Dans la suite de cette sous-section, nous allons déterminer pour chacune de différents types de fonction d'utilité une mesure du risque correspondante.

Une fonction d'utilité exponentielle négative

On suppose que les préférences de l'investisseur sont représentées par une fonction d'utilité exponentielle négative ou *CARA*. Une fonction d'utilité est dite *CARA* si son aversion absolue au risque est un constant par rapport au niveau de richesse.

$$U(W) = -e^{-\beta W}, \quad (1.4.12)$$

où $\beta > 0$ l'aversion absolu au risque qui est constant.

Il est important de vérifier si cette fonction de l'utilité satisfait les quatre propriétés de la dominance stochastique. C'est-à-dire : $U^{(1)} > 0$, $U^{(2)} < 0$, $U^{(3)} >$

0, $U^{(4)} < 0$, avec $U^{(i)}$ la dérivée i -ème de la fonction d'utilité.

$$\begin{cases} U^{(1)} = \beta e^{-\beta W} > 0 \\ U^{(2)} = -\beta^2 e^{-\beta W} < 0 \\ U^{(3)} = \beta^3 e^{-\beta W} > 0 \\ U^{(4)} = -\beta^4 e^{-\beta W} < 0 \end{cases}$$

L'espérance d'utilité appliquée à la richesse, tronquée à l'ordre quatre donne :

$$\langle U(W) \rangle = e^{-\beta \langle W \rangle} \left[-1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \beta^2 + \frac{1}{3!} \lambda_3 \beta^3 - \frac{1}{4!} \lambda_4 \beta^4 \right].$$

La maximisation de cette quantité revient à minimiser le risque défini par¹⁶ :

$$\mathcal{R}_{exp} = \sigma^2 - \frac{1}{3} \lambda_3 \beta + \frac{1}{12} \lambda_4 \beta^2. \quad (1.4.13)$$

Comme il se doit, cette mesure du risque est une combinaison linéaire de la variance, le skewness et le kurtosis puisqu'elle est quatre fois derivable. On remarque en plus que les pondérations de moments dépendent du l'aversion au risque. Plus concrètement, ce paramètre donne la possibilité à l'investisseur de pondérer faiblement ou fortement les queues de la distribution de la richesse selon son attitude face au risque. Il est utile de noter que si la richesse finale suit une loi gaussienne, cette mesure du risque se ramène à la variance. En effet, ce résultat est très connu sous les hypothèse de célèbre modèle de Markowitz (1952).

La fonction d'utilité isoélastique :

Si on suppose maintenant que les préférences de l'investisseur sont représentées par une fonction d'utilité isoélastique où $CRRA$ ¹⁷. Dites $CRRA$ car elle possède

¹⁶.

$$\begin{aligned} \max \langle U(W) \rangle &\Leftrightarrow \max \left\{ e^{-\beta \langle W \rangle} \left[-1 - \frac{1}{2} \sigma^2 \beta^2 + \frac{1}{3!} \lambda_3 \beta^3 - \frac{1}{4!} \lambda_4 \beta^4 \right] \right\} \\ &\Leftrightarrow \max \left[-\sigma^2 + \frac{1}{6} \lambda_3 \beta - \frac{1}{12} \lambda_4 \beta^2 \right]. \\ &\Leftrightarrow \min \left[\sigma^2 - \frac{1}{6} \lambda_3 \beta + \frac{1}{12} \lambda_4 \beta^2 \right]. \end{aligned}$$

Puisque $e^{-\beta \langle W \rangle}$ et β sont des constantes.

¹⁷. Dans le cas où $\gamma = 0$, l'investisseur est neutre au risque

une fonction d'aversion relative au risque constante qui égale à γ . Cette fonction d'utilité a fait l'objet de plusieurs études théoriques et empirique, on cite à titre d'exemple Rubinstein (1976), Coutant (1999), Jondeau et Rockinger (2003, 2005 et 2006), Guidolin et Timmermann (2005) et Bliss et Panigirtzoglou (2004).

$$U(W) = \begin{cases} \frac{1}{1-\gamma} W^{1-\gamma} & \text{si } \gamma \neq 1 \\ \ln(W) & \text{si } \gamma = 1 \end{cases} \quad (1.4.14)$$

Comme la fonction d'utilité exponentielle négative et avant de déterminer la mesure du risque correspondante, il faut vérifier si cette fonction satisfait bien les quatre propriétés suivantes :

$$\begin{cases} U^{(1)} = W^{-\gamma} > 0, \\ U^{(2)} = -\gamma W^{-\gamma-1} < 0, \\ U^{(3)} = \gamma(1+\gamma)W^{-\gamma-2} > 0, \\ U^{(4)} = -\gamma(1+\gamma)(2+\gamma)W^{-\gamma-3} < 0. \end{cases}$$

De même si $\gamma = 1$ nous avons bien $U^{(1)} > 0$, $U^{(2)} < 0$, $U^{(3)} > 0$ et $U^{(4)} < 0$.

L'espérance d'utilité appliquée à la richesse, tronquée à l'ordre quatre donne :

$$\begin{cases} \left\langle \frac{1}{1-\gamma} W^{1-\gamma} \right\rangle \simeq (1-\gamma)^{-1} \langle W \rangle^{(1-\gamma)} - \frac{\gamma}{2} \sigma^2 \langle W \rangle^{-(1+\gamma)} + \frac{\gamma(1+\gamma)}{3!} \lambda_3 \langle W \rangle^{-(\gamma+2)} \\ \quad - \frac{\gamma(1+\gamma)(2+\gamma)}{4!} \lambda_4 \langle W \rangle^{-(\gamma+3)} \\ \langle \ln(W) \rangle \simeq \ln(\langle W \rangle) - \frac{1}{2} \sigma^2 \langle W \rangle^{-2} + \frac{2}{3!} \lambda_3 \langle W \rangle^{-3} - \frac{6}{4!} \lambda_4 \langle W \rangle^{-4} \end{cases}$$

La maximisation de cette quantité revient à minimiser le risque défini par :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{iso(\gamma \neq 1)} = \sigma^2 - \frac{(1+\gamma)}{3} \langle W \rangle^{-1} \left[\lambda_3 - \frac{(2+\gamma)}{4} \lambda_4 \langle W \rangle^{-1} \right] \\ \mathcal{R}_{iso(\gamma=1)} = \sigma^2 - \frac{2}{3} \lambda_3 \langle W \rangle^{-1} + \frac{1}{2} \lambda_4 \langle W \rangle^{-2} \end{cases} \quad (1.4.15)$$

Comme la mesure du risque de la fonction précédente, cette mesure est, de même, une combinaison linéaire de la variance, le skewness et le kurtosis. On remarque en plus que les pondérations de moments dépendent, cette fois ici, de l'aversion relative

au risque γ et l'espérance de la richesse finale.

La fonction d'utilité Hyperbolique :

On suppose que les préférences de l'investisseur sont spécifiées par une fonction d'utilité Hyperbolique ou *HARA* Hyperbolic absolute risk aversion¹⁸ de la forme¹⁹ :

$$U(W) = \frac{\gamma}{1-\gamma} \left(\beta + \frac{\alpha}{\gamma} W \right)^{(1-\gamma)}$$

avec :

$$\begin{cases} \beta + \frac{\alpha}{\gamma} W > 0, \\ \gamma > -2, \\ \alpha > 0 \quad \beta \geq 0. \end{cases}$$

Il est aisé de montrer que cette fonction vérifie bien les quatre propriétés de dominance stochastique.

$$\begin{cases} U^{(1)} = \alpha \left(\beta + \frac{\alpha}{\gamma} W \right)^{-\gamma} > 0, \\ U^{(2)} = -\alpha^2 \left(\beta + \frac{\alpha}{\gamma} W \right)^{-(1+\gamma)} < 0, \\ U^{(3)} = \alpha^3 \left(\frac{\gamma+1}{\gamma} \right) \left(\beta + \frac{\alpha}{\gamma} W \right)^{-(2+\gamma)} > 0 \\ U^{(4)} = -\alpha^3 \left(\frac{(\gamma+1)(\gamma+2)}{\gamma^2} \right) \left(\beta + \frac{\alpha}{\gamma} W \right)^{-(3+\gamma)} < 0 \end{cases}$$

L'approximation de Taylor tronquée à l'ordre quatre appliquée à l'utilité espérée de cette fonction implique :

$$\begin{aligned} \langle U(W) \rangle &\simeq \frac{\gamma}{1-\gamma} \left[\beta + \frac{\alpha}{\gamma} \langle W \rangle \right]^{1-\gamma} - \frac{\alpha^2}{2} \left[\beta + \frac{\alpha}{\gamma} \langle W \rangle \right]^{-(1+\gamma)} \sigma^2 \\ &+ \lambda_3 \frac{\alpha^3 (\gamma+1)}{3! \gamma} \left[\beta + \frac{\alpha}{\gamma} \langle W \rangle \right]^{-(2+\gamma)} \\ &- \lambda_4 \frac{\alpha^4 (\gamma+1)(\gamma+2)}{4! \gamma^2} \left[\beta + \frac{\alpha}{\gamma} \langle W \rangle \right]^{-(3+\gamma)}. \end{aligned}$$

18. Cette fonction est dite hyperbolique car sa fonction d'aversion au risque est parfois croissante pour $\gamma > 0$ et décroissante pour $\gamma < 0$.

19. Si $\gamma > 0$ et $\beta = 0$ nous avons bien la fonction d'utilité isoélastique et si $\gamma \rightarrow +\infty$ et $\beta = 1$ nous avons la fonction d'utilité exponentielle négative

La maximisation de cette fonction revient à minimiser cette quantité :

$$\max \langle U(W) \rangle \iff \min \left(- \left[-\sigma^2 + \lambda_3 \frac{\alpha(\gamma+1)}{3\gamma} \left[\beta + \frac{\alpha}{\gamma} \langle W \rangle \right]^{-1} - \lambda_4 \frac{\alpha^2(\gamma+1)(\gamma+2)}{12\gamma^2} \left[\beta + \frac{\alpha}{\gamma} \langle W \rangle \right]^{-2} \right] \right)$$

Ce qui revient à minimiser :

$$\mathcal{R} = \sigma^2 - \frac{\alpha(\gamma+1)}{3\gamma} \left[\beta + \frac{\alpha}{\gamma} \langle W \rangle \right]^{-1} \left[\lambda_3 - \lambda_4 \frac{\alpha(\gamma+2)}{4\gamma} \left[\beta + \frac{\alpha}{\gamma} \langle W \rangle \right]^{-1} \right] \quad (1.4.16)$$

On voit très bien que cette mesure du risque dépend, de plus des paramètres (α, β, γ) , de l'espérance de la richesse finale W . Elle est une combinaison linéaire de la variance, de la skewness et de la kurtosis. Leurs pondérations dépendent de tous les paramètres de la fonction d'utilité et de l'espérance la richesse finale. Il évident de remarque que cette mesure du risque dépend négativement de la skewness et positivement de la variance et de la kurtosis mais on ne peut pas juger sur la variation de cette mesure par apport au différents paramètres de la fonction d'utilité à savoir (α, β, γ) .

Ces trois mesures du risque regroupent les moments d'ordre deux, trois et quatre. Elles donnent une bonne idée sur la dissymétrie de la distribution et aux queues des distributions qui nous renseignent sur la fréquence des grands mouvements et surtout qui elles sont plus sensibles aux grandes fluctuations que la variance.

1.4.3 Application des mesures du risque fondée sur la fonction d'utilité aux indices boursiers

Afin d'évaluer le risque des différentes indices boursiers cités auparavant en utilisant les mesures du risque théoriquement trouvés fondées sur diverses fonctions d'utilité, il faut bien choisir les paramètres de ces mesures de risque notamment le

Tableau 2-6 – Un tableau récapitulatif de nos résultats théoriques

Fonctions d'utilité	Forme	Aversion au Risque	Mesure du risque
Exponentielle négative	$-e^{-\beta W}$,	β	$\sigma^2 - \frac{1}{3}\lambda_3\beta + \frac{1}{12}\lambda_4\beta^2$
Isoélastique	$\frac{1}{1-\gamma}W^{1-\gamma}$	γ	$\sigma^2 - \frac{(1+\gamma)}{3}\langle W \rangle^{-1} \left[\lambda_3 - \frac{(2+\gamma)}{4}\lambda_4 \right] \langle W \rangle^{-1}$
Hyperbolique	$\frac{\gamma}{1-\gamma} \left(\beta + \frac{\alpha}{\gamma}W \right)^{(1-\gamma)}$	$\frac{\alpha\gamma}{\alpha W + \beta\gamma}$	$\sigma^2 - \frac{\alpha(\gamma+1)}{3\gamma} \left[\beta + \frac{\alpha}{\gamma}\langle W \rangle \right]^{-1} \times \left[\lambda_3 - \lambda_4 \frac{\alpha(\gamma+2)}{4\gamma} \left[\beta + \frac{\alpha}{\gamma}\langle W \rangle \right]^{-1} \right]$

paramètre d'aversion au risque²⁰. Le tableau 2-7 présente les différents travaux qui ont estimé ce paramètre. Nous avons opté pour un choix de β et γ selon les valeurs estimés de ces différents paramètres regroupées dans le tableau 2-7.

1.4.3.1 La mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité exponentielle négative

Les résultats du tableau 2-8 indiquent que la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité exponentielle négative des différents indices boursiers qui caractérise un agent risquophobe dont l'aversion vis à vis du risque est constante quelque soit la richesse c.à.d la valeur de titres risqués détenue par l'individu va rester constant, augmentent en fonction du paramètre β . En d'autre terme, le risque croît avec l'aversion absolue au risque.

On remarque évidemment sur la Figure 2.2, l'effet de la variation de la valeur de risque en fonction de β . Il est important de constater que cette mesure du risque, qui intègre la fonction d'aversion au risque, vient consolider les résultats trouvés précédemment avec ceux des autres mesures de risque traditionnelles : l'écart-type

20. L'estimation de la fonction de l'aversion au risque fait l'objet du troisième chapitre.

Tableau 2-7 – Les différentes valeurs de l’aversion au risque dans le littérature

Etudes	Valeur de l’aversion au risque
Arrow (1971)	1
Friend et Blume (1975)	2
Hansen et Singleton (1982,1984)	(-1.3) :1.6
Mehra et Prescott (1985)	55
Ferson et Constantinides (1991)	0 :12
Epstien et Constantinides (1991)	0 :2
Cochrane et Hansen (1992)	40 :50
Jorion et Giovannini (1993)	5.4 :11.9
Normandin et Saint-Amour (1998)	< 3
Sophie Coutant (1999)	0 :11.404
Ait-Sahalia et Lo (2000)	12.7
Jackwerth (2000)	-15 :20
Guo et Whitelaw (2001)	3.52
Pérignon et Villa (2002)	(-50) :50 et (-30) :30
Bliss et Panigirtzoglou (2004)	0.37 :15.97

Tableau 2-8 – Calcul de mesures de risque fondée sur une fonction d’utilité exponentielle négative pour différentes valeurs de β

Indices boursiers	$\beta = 0.5$	$\beta = 1$	$\beta = 2$	$\beta = 10$	$\beta = 20$
CAC 40	1.9775 E-04	1.9775 E-04	1.9784 E-04	2.0208 E-04	2.1627 E-04
DAX	1.8436 E-04	1.8430 E-04	1.8426 E-04	1.8707 E-04	1.9862 E-04
FTSE 100	1.6455 E-04	1.6462 E-04	1.6482 E-04	1.6888 E-04	1.8019 E-04
NASDAQ	2.7079 E-04	2.7127 E-04	2.7234 E-04	2.8713 E-04	3.2106 E-04
NIKKEI	2.1067 E-04	2.1081 E-04	2.1118 E-04	2.1747 E-04	2.3376 E-04

de Markowitz et les différentes méthodes de calcul de VaR à la différence qu'elle permet de rendre compte des préférences de l'investisseur.

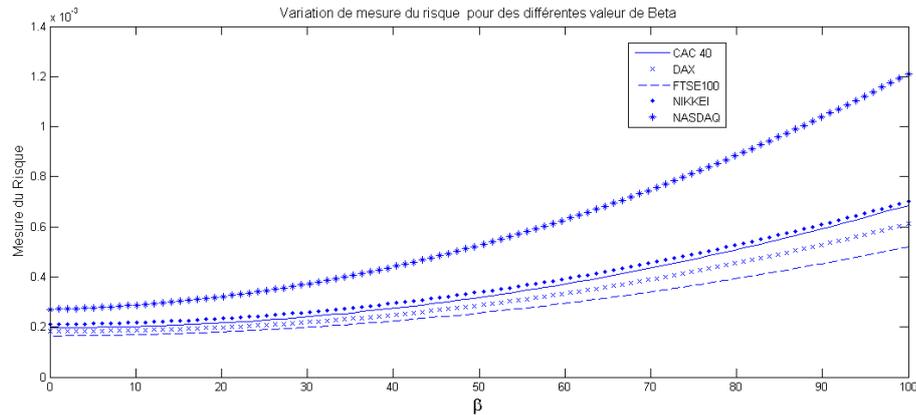


Figure 2.2 – La variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité exponentielle négative en fonction du paramètre β

Le paramètre β joue un rôle très important au niveau de pondération de queue de distribution de la variable considérée selon l'attitude vis-à-vis au risque. L'étude statistique de différents indices boursiers montre qu'ils possèdent un kurtosis élevé et un skewness négatif (sauf pour le CAC 40 et DAX). La prise en compte de l'attitude de l'investisseur vis-à-vis du risque, contrairement aux autres mesures de risque traditionnelles, explique la forte variation de la valeur calculée de mesure du risque des indices boursiers. En effet, d'après l'équation 1.4.13, cette mesure du risque est une combinaison linéaire de la variance, skewness et kurtosis, elle dépend positivement de la variance et le kurtosis (λ_4) et négativement du skewness ($-\lambda_3$). Si $\beta \rightarrow +\infty$, $\beta(-\lambda_3)$ augmente (puisque $\lambda_3 < 0$) et $\beta^2 \lambda_4$ augmente aussi, ce qui explique la forte variation de la valeur de mesure de risque issue de la fonction d'utilité exponentielle négative.

1.4.3.2 Une mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité isoélastique

D'après le tableau 2-9, on note que les valeurs de mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité isoélastique²¹, qui caractérise un agent risquophobe, sont plus élevées que celles de la fonction d'utilité exponentielle négative²². Ceci s'explique par le fait qu'à la différence de la fonction d'utilité exponentielle négative dont l'aversion au risque absolu est constante, l'aversion au risque absolu pour la fonction isoélastique est décroissante avec la richesse, ce qui signifie que la valeur des titres risqués détenus par les investisseurs augmente pour ce type de fonction d'utilité. Le tableau 2-9 nous indique aussi que la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité isoélastique des différentes indices boursiers augmentent en fonction du paramètre γ .

Tableau 2-9 – Calcul de mesures de risque fondée sur une fonction d'utilité isoélastique pour différentes valeurs de γ

Indices boursiers	$\gamma = 0.5$	$\gamma = 2$	$\gamma = 3$	$\gamma = 5$	$\gamma = 10$
CAC 40	2.4561 E-04	2.4558 E-04	2.4567 E-04	2.4612 E-04	2.4879 E-04
DAX	2.7628 E-04	2.7610 E-04	2.7611 E-04	2.7643 E-04	2.7900 E-04
FTSE 100	1.7544 E-04	1.7556 E-04	1.7570 E-04	1.7614 E-04	1.7814 E-04
NIKKEI	2.6380 E-04	2.6453 E-04	2.6516 E-04	2.6677 E-04	2.7286 E-04
NASDAQ	3.7776 E-04	3.7738 E-04	3.7735 E-04	3.7785 E-04	3.8230 E-04

D'après la Figure 2.3, la mesure du risque issue d'une fonction isoélastique subit une variation exponentielle en fonction de paramètre d'aversion au risque γ . Comme pour la fonction exponentielle, le classement des indices boursiers selon le critère de risque est le même pour la fonction d'utilité isoélastique à la différence que cette dernière offre une mesure du risque pour les investisseurs qui sont risquophobes et que leur attitude d'aversion au risque décroît avec la richesse.

Tableau 2-10 – Calcul de mesures de risque fondée sur une fonction d'utilité exponentielle négative pour différentes valeurs de β

Indices boursiers	$\beta = 0.5$	$\beta = 2$	$\beta = 3$	$\beta = 5$	$\beta = 10$
CAC 40	2.4572 E-04	2.4549 E-04	2.4544 E-04	2.4562 E-04	2.4763 E-04
DAX	2.2651 E-04	2.2610 E-04	2.2595 E-04	2.2596 E-04	2.2777 E-04
FTSE 100	1.7541 E-04	1.7541 E-04	1.7548 E-04	1.7576 E-04	1.7738 E-04
NIKKEI	2.6344 E-04	2.6390 E-04	2.6435 E-04	2.6561 E-04	2.7082 E-04
NASDAQ	3.7820 E-04	3.7740 E-04	3.7710 E-04	3.7705 E-04	3.8012 E-04

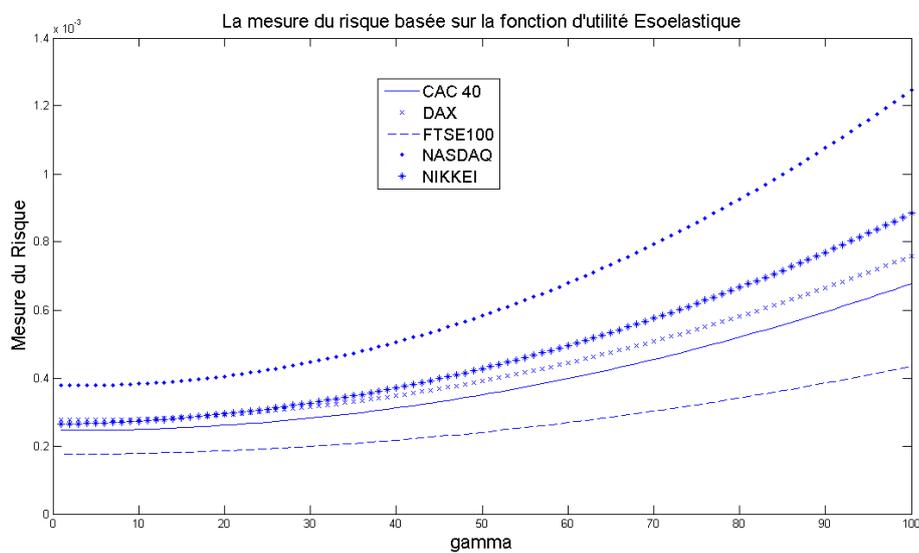


Figure 2.3 – La variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité isoélastique en fonction du paramètre γ

Il apparaît nécessaire de remarquer que la prise en compte de l'attitude des investisseurs vis-à-vis du risque et de leurs préférences lors de l'évaluation des risques des indices boursiers via des mesures de risque fondées sur différentes fonctions d'utilité a un impact significatif sur la quantification de ces risques.

1.4.3.3 Une mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité Hyperbolique

Tableau 2-11 – La variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité HARA pour des valeurs particulières de β and γ

Indices boursiers	$\gamma := +\infty$ and $\beta = 1$	$\gamma > 0$ and $\beta = 0$
CAC 40	2.4549 E-04	2.4567 E-04
DAX	2.2610 E-04	2.2611 E-04
FTSE 100	1.7541 E-04	1.7570 E-04
NIKKEI	2.6390 E-04	2.6516 E-04
NASDAQ	3.7740 E-04	3.7735 E-04

Le tableau 2-11 illustre les calculs effectués sur notre mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité HARA pour le cas²³ où $\gamma > 0$ et $\beta = 0$ et le cas où $\gamma = +\infty$ et $\beta = 1$ qui représentent les cas pour lesquelles la fonction d'utilité HARA correspond respectivement à une fonction d'utilité isoélastique et exponentielle négative.

Les résultats de ce tableau viennent corroborer nos résultats trouvés dans le tableau 2-8, troisième colonne (pour $\beta = 1$) pour les valeurs de la mesure du risque issue de la fonction d'utilité exponentielle négative et nos résultats trouvés dans le tableau 2-9, quatrième colonne pour les valeurs de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité isoélastique.

21. La fonction d'utilité isoélastique est définie dans R^+ , pour cette raison, au lieu de calculer une mesure du risque pour les rendements on va la calculer pour $\frac{S_t}{S_{t-1}}$.

22. Les Calculs de mesures de risque fondée sur une fonction d'utilité exponentielle négative pour $\frac{S_t}{S_{t-1}}$ sont déterminés au tableau 2-9

23. α n'a aucun effet sur la valeur du risque dans le cas où la fonction d'utilité est isoélastique et correspond à β dans le cas où la fonction est exponentielle négative

Les Figures 2.4, 2.5 et 2.6 illustrent la variation de notre mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité HARA pour différentes valeurs de γ , α et β toutes choses étant égales par ailleurs. D'après la Figure 2.4 qui présente la variation de notre mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité HARA en fonction de α toutes choses étant égales par ailleurs, on remarque que cette mesure du risque ne subit aucune variation en fonction de α pour les différents indices boursiers.

On note aussi que la variation de la mesure du risque en fonction de α n'est pas affectée par le choix des paramètres γ et β . Contrairement à la variation positive de mesure du risque en fonction de α , l'aversion au risque absolue pour une fonction d'utilité HARA est décroissante en fonction de α .

Il s'avère d'après la Figure 2.5 illustrant la variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité HARA en fonction de γ est quasiment nulle si on opte pour différents choix du paramètre β et tout en gardant le paramètre α constant et on obtient le même résultat si on fixe β et en faisant varier α .

Quant à l'aversion absolue au risque d'une fonction d'utilité HARA, elle présente deux régimes, (i) elle est décroissante si $\gamma > 0$, dans ce cas de figure la valeur des titres risqués détenues par le gérant du fond a tendance à augmenter et elle est (ii) croissante pour $\gamma < 0$, présentant différentes attitudes vis-à-vis du risque dépendant du paramètre γ .

La Figure 2.6 illustrant la variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité HARA en fonction du paramètre β , indique que la mesure du risque reste constante en fonction de β et ce pour toutes les indices boursiers. Ce qui implique que ce paramètre β n'a aucun effet sur la quantification du risque en termes de la fonction d'utilité HARA. Ceci étant vrai quelque soit le choix des paramètres α et γ . Cependant l'aversion au risque absolue est croissante en fonction de β .

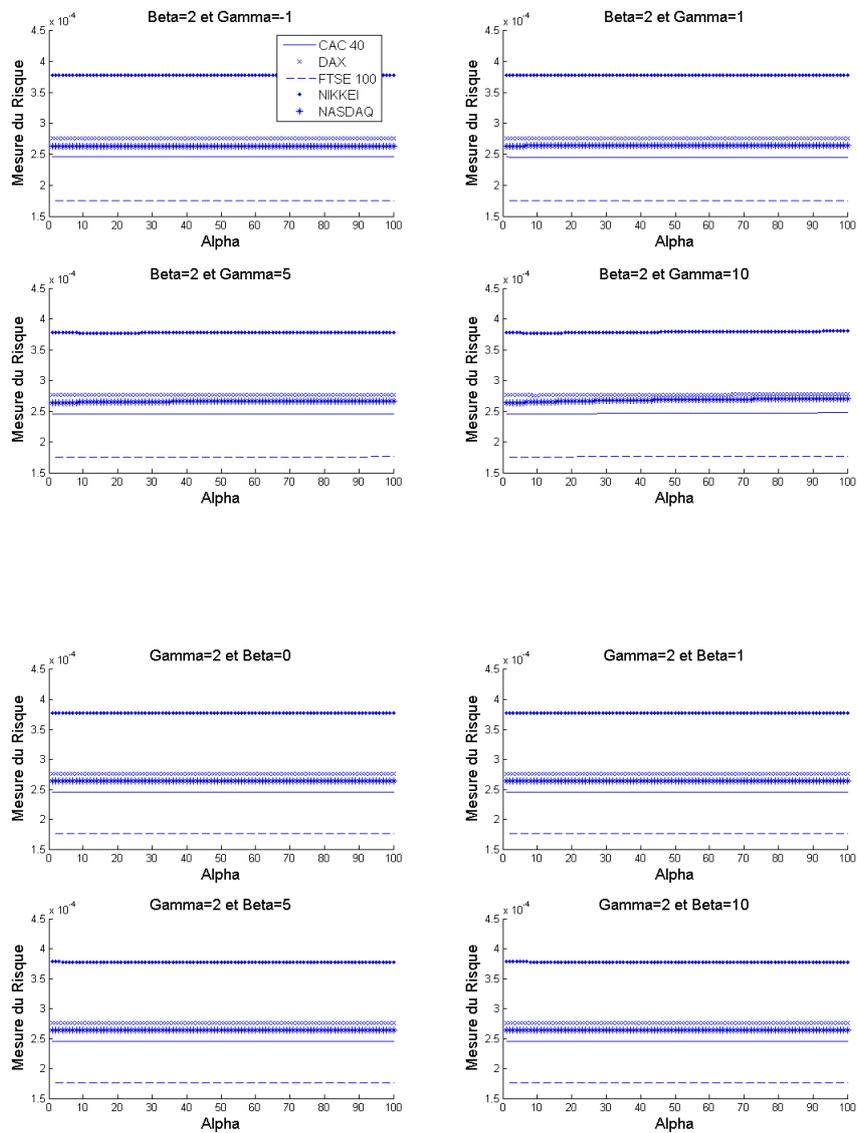


Figure 2.4 – La variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité en fonction de α pour des différentes valeurs de γ et β

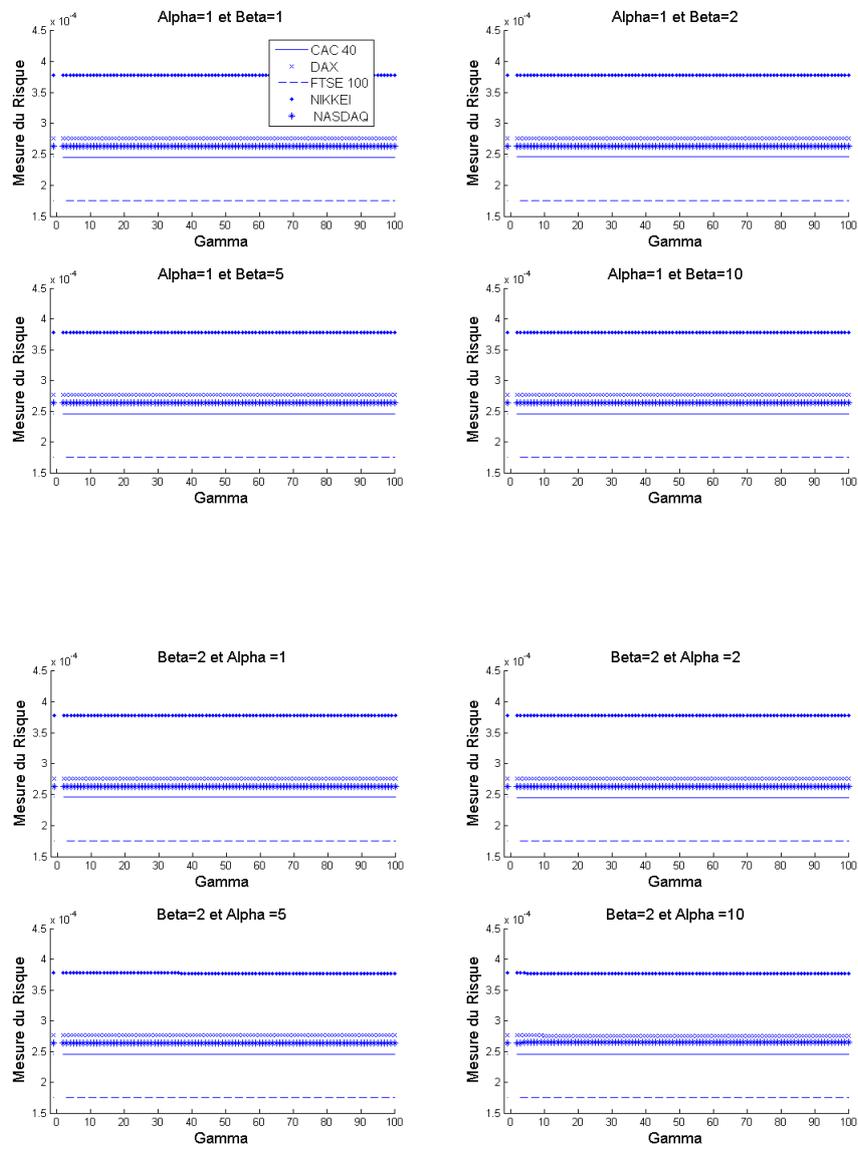


Figure 2.5 – La variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité en fonction de γ pour des différentes valeurs de α et β

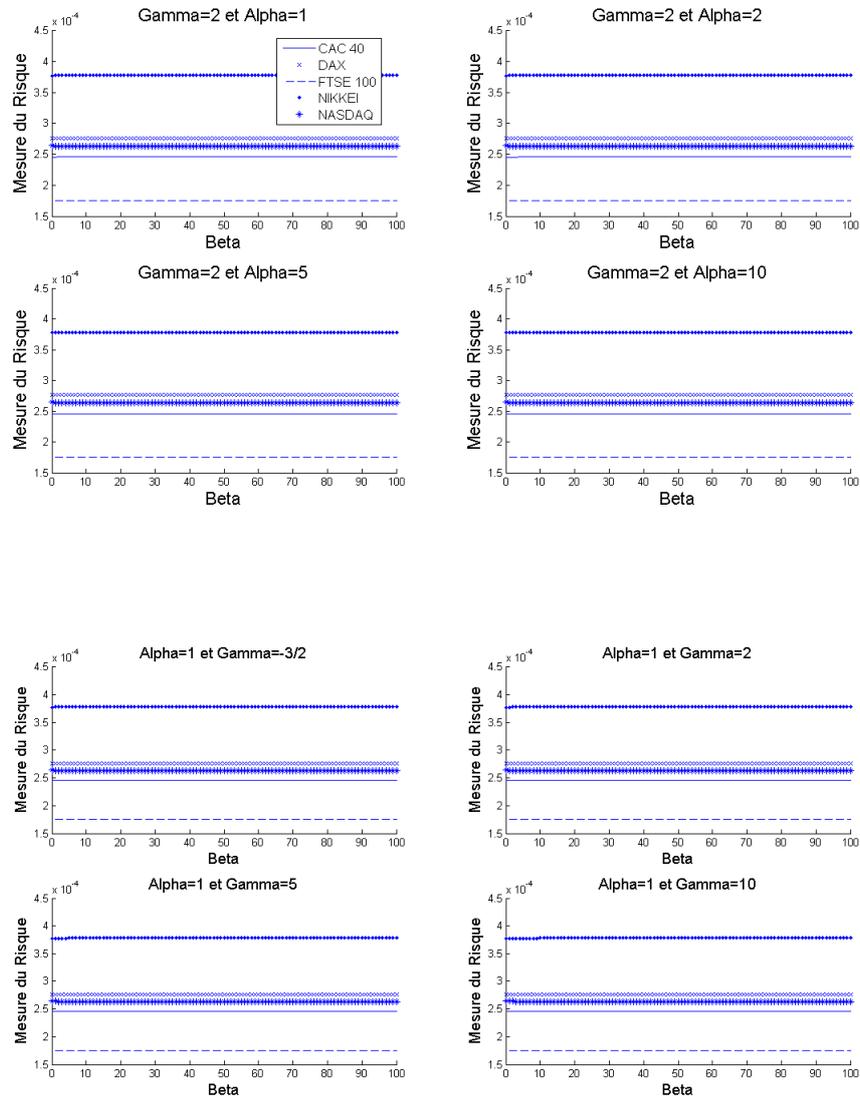


Figure 2.6 – La variation de la mesure du risque fondée sur la fonction d'utilité en fonction de β pour des différentes valeurs de α et β

1.5 Conclusion

Les approches traditionnelles de calcul du risque tel que la variance, les différentes approches de calcul de la VaR et l'Expected Shortfall ne s'avèrent pas suffisantes face à un environnement en perpétuelle mutation et ils ne tiennent pas compte de

l'attitude de l'investisseur vis à vis du risque. Dans ce chapitre, on a déterminé, à partir d'un programme de maximisation de l'espérance d'utilité, une mesure du risque générale s'appliquant aux fonctions d'utilité exponentielle négative, isoélastique ou "utilités CRRA" (constant relative risk aversion) et hyperbolique ou "utilités HARA" (Hyperbolic absolute risk aversion). A titre illustratif, on a appliqué ces mesures de risque aux principaux indices boursiers tout en les comparant par les mesures de risque traditionnelles. On a trouvé que ces mesures sont sensibles au choix des différents paramètres d'aversion au risque. La variation de cette mesure du risque est une variation positive pour les fonctions d'utilité exponentielle négative et isoélastique alors qu'elle change de sens pour la fonction d'utilité hyperbolique en fonction des différents paramètres de l'aversion au risque.

Comme nous avons signalé à l'introduction générale, le deuxième objectif de cette thèse est de déterminer une stratégie de couverture en faisant appel à l'approche de l'utilité espérée. Une telle stratégie de couverture s'obtient en minimisant le risque associé. Cependant, la littérature économique suggère qu'il existe une relation entre l'aversion au risque et les densités de probabilités risque neutre et subjective.

$$A_{at}(x_T) = \frac{p'_t(x_T)}{p_t(x_T)} - \frac{q'_t(x_T)}{q_t(x_T)}.$$

où $p(\cdot)$ la densité subjective et $q(\cdot)$ la densité neutre au risque.

L'estimation la densité neutre au risque selon les trois différentes approches paramétrique, semi-paramétrique et non paramétrique fait l'objet du deuxième chapitre. Et l'estimation de l'aversion au risque paramètre fait l'objet du troisième chapitre.

Bibliographie

- [1] **Agarwal V. & Naik N. (2004)**, *Risk and Portfolio Decisions Involving Hedge Funds*, International Review of Economics and Finance 9(3), 209-222.
- [2] **Baillie R. T. & DeGennaro R. P. (1990)**, *Stock Returns and Volatility*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 25, 203-214.
- [3] **Bali T. G. & Gokcan S. (2004)**, *Alternative Approaches to estimating VaR for Hedge Fund Portfolios*, Edited by Barry Schachter, Intelligent Hedge Fund Investing, 253-277, Risk Books, Publisher : Incisive Media PLC.
- [4] **Bellalah M. & Selmi F. (2002)**, *Les fonctions d'utilité et l'avantage informationnel des moments d'ordre supérieurs : application à la couverture d'options*, Finance 23, 14-27.
- [5] **Bell D. E. (1988)**, *One-switch utility function and a measure of risk*, Management Science, vol. 34, 1416-1424.
- [6] **Bell D. E. (1995)**, *Risk, return, and utility*, Management Science, vol. 41, 23-30.
- [7] **Beirlant J., Vynckier P. & Teugels J. L. (1996)**, *Tail Index Estimation, Pareto Quantile Plots, and Regression Diagnostics*, Journal of the American Statistical Association, 91, 1659-1667.
- [8] **Bliss R. R. & Panigirtzoglou N. (2004)**, *Option Implied Risk Aversion Estimates*, The Journal Of Finance, Vol 1, 407-446.
- [9] **Bouchaud J. P. & Potters M. (1997)**, *Théories des risques financiers*, coll. "Aléa-Saclay".

- [10] **Bouchaud J. P. & Selmi F. (2001)**, *Risk business*, Wilmott magazine.
- [11] **Coles S. (2001)**, *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer Verlag.
- [12] **Coombs C. H. & Lehner P. E. (1981)**, *An evaluation of tow alternative models for a theory of risk : Part 1*, Journal Experimental Psychology, Human Perception and Performance, N°7, 1110-1123.
- [13] **Coombs C. H. & Lehner P. E. (1981)**, *Conjoint design and analysis of the bilinear model : An application to judgments of risk*, Journal Math. psychology, N°28, 1-42.
- [14] **Coutant S. (1999)**, *Implied risk aversion in option prices using hermite polynomials*, CEREG Working Paper N°9908.
- [15] **Danielsson J. & de Vries C. G. (1998)**, *Beyond the Sample : Extreme Quantile and Probability Estimation*, Discussion Paper 298, London School of Economics.
- [16] **Dowd K. (2000)**, *Adjusting for Risk : An Improved Sharpe Ratio*, International Review of Economics and Finance 9(3), 209-222.
- [17] **Dowd K. (2002)**, *A Bootstrap Backtest*, Risk, 15, N°10, 93-94.
- [18] **Embrechts P., Klüppelberg C. & Mikosch T. (1997)**, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer Verlag.
- [19] **Embrechts P., McNeil A. & Straumann D. (2002)**, *Correlation and Dependence in Risk Management : Properties and Pitfalls*, In Risk Management : Value at Risk and Beyond, ed. M.A.H. Dempster, Cambridge University Press, 176-223.
- [20] **Favre L. & Galeano J. (2002)**, *Mean-Modified Value-at-Risk Optimization with Hedge Funds*, Journal of Alternative Investment 5(2), 21-25.
- [21] **Fishburn P. C. (1982)**, *Foundations of risk measurement, I, Risk as probable loss*, Mangement Science, N°30, 296-406.
- [32] **Füss R., Kaiser D. G. & Adams Z. (2007)**, *Value at Risk, GARCH Modelling and Forcasting of Hedge Fund Return Volatility*, Journal of Derivatives and Hedge Funds, Vol.13 N°1, 2-25.

- [23] **Gregoriou G. & Gueyie J. (2003)**, *Risk-Adjusted Performance of Funds of Hedge Funds Using a Modified Sharpe Ratio*, Journal of Wealth Management 6(3), 77-83.
- [24] **Guidolin M. & Timmermann A.(2005a)**, *Optimal portfolio choices under regime switching, skew and kurtosis preferences*, Working Paper, Federal Reserve Bank of St Louis, 35 pages.
- [25] **Guidolin M. & Timmermann A.(2005b)**, *International asset allocation under regime switching, skew and kurtosis preferences*, Working Paper, Federal Reserve Bank of St Louis, 54 pages.
- [26] **Gupta A. & Liang B. (2005)**, *Do Hedge Funds Have Enough Capital? A Value at Risk Approach*, Journal of Financial Economics 77, 219-253.
- [27] **Jia R. & Dyer J. S. (1996)**, *A standard measure of risk and risk-value models*, Management Science, vol. 42 (12), 1691-1705.
- [28] **Jondeau E. & Rockinger M. (2003)**, *How higher moments affect the allocation of asset*, Finance Letters 1 (2), 1-5.
- [29] **Jondeau E. & Rockinger M. (2005)**, *Conditional asset allocation under non-normality : How costly is the Mean-Variance criterion*, Working Paper, HEC Lausanne, 42 pages.
- [29] **Jondeau E. & Rockinger M. (2006)**, *Optimal portfolio allocation under higher moments*, Journal of the European Financial Management Association 12, 29-67.
- [30] **Kellezi E.& Gilli M. (2000)**, *Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measures*, Working Paper, University of Geneva, Geneva.
- [31] **Kendall A. (1977)**, *The advanced theory of statistics*, Charles Griffin, London.
- [32] **Kimball M. (1993)**, *Standard risk aversion*, Econometrica 61 (3), 589-611.
- [33] **Levy H. & Kroll Y. (1978)**, *Ordering Uncertain Options with Borrowing and Lending*, Journal of Finance, 553-574.
- [34] **Liang B. (1999)**, *On the performance of hedge funds*, Financial Analysts Journal 55, 72-85.

- [35] **Luce R. D. (1980)**, *Several possible measure of risk*, Theory and decision, N°12, 217-228.
- [36] **Maillet B. & Jurczenko E. (2006)**, *Theoretical Foundations of Higher Moments when Pricing Assets*, Multi-moment Asset Allocation and Pricing Models 1-36.
- [37] **Markowitz H. M. (1952)**, *The utility of wealth*, journal Political Economy, 60, 151-158.
- [38] **Markowitz H. M. (1959)**, *Portfolio selection, efficient diversification of investment*, New Haven, CT, Yale university Press.
- [39] **Ranaldo A. & Favre L. (2005)**, *How to Price Hedge Funds : From Two- to Four-Moment CAPM*, Working Paper, UBS Global Asset Management.
- [40] **Sarin R. K. (1987)**, *Some extensions of luce's measures of risk*, Theory and decision, N°22, 25-141.
- [41] **Scott R. & Horvath P. (1980)**, *On the Direction of Reference for Moments of Higher Order than the Variance*, Journal of Finance 35(4), 915-919.

Appendices

A.1 L'approche espérance-variance

L'approche moyenne-variance est principalement justifiée par deux raisons.

A.1.1 La fonction d'utilité est quadratique

Lorsque la fonction d'utilité est quadratique sous la forme :

$$U(W) = aW - bW^2$$

avec $a > 0$ et $b > 0$. $\langle U(W) \rangle$ s'identifie uniquement par la moyenne et la variance de la distribution W tel que soit la distribution suivie par la richesse. En effet, on a alors :

$$\langle U(W) \rangle = \langle aW - bW^2 \rangle = a\langle W \rangle - b(\langle W \rangle^2 + \sigma_W^2)$$

où : $\langle \cdot \rangle$ est l'opérateur espérance et σ_W^2 la variance de la richesses.

L'espérance de l'utilité ne dépend donc que de $\langle W \rangle$ et de σ_W^2 .

A.1.2 La normalité de la distribution de richesse

Si la richesse aléatoire suit une loi gaussienne, et donc définie par les deux premiers moments : la moyenne et la variance, alors on peut définir des courbes d'indifférence dans l'espace espérance-variance.

Soient \bar{W} et σ^2 , respectivement, la moyenne et la variance de la distribution de \tilde{W} . On note $V(\bar{W}, \sigma_W)$ l'utilité espérée définie par les deux premiers moments :

$$V(\bar{W}, \sigma_W) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(W) f(W) dW$$

où U est la fonction d'utilité élémentaire, f la fonction de densité définie par :

$$f(W) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{W-\bar{W}}{\sigma}\right)^2}$$

En plus, nous supposons que la fonction d'utilité u est strictement croissante et strictement concave :

$$U'(W) > 0, U''(W) < 0$$

Soit ζ une variable centrée réduite définie par \bar{W} et σ^2 :

$$\zeta = \frac{W - \bar{W}}{\sigma}$$

par conséquent :

$$d\zeta = \frac{dW}{\sigma}$$

on peut réécrire la fonction d'utilité espérée de la manière suivante :

$$V(\bar{W}, \sigma_W) = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\bar{W} + \zeta\sigma) n(\zeta) d\zeta$$

où n est la fonction de densité de la loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.

Dans la suite de cette démonstration, nous allons vérifier la croissance et la convexité de courbes d'indifférences. Dans un premier temps, nous allons calculer les dérivées partielles de la fonction de l'utilité espérée par rapport à \bar{W} et σ pour montrer que les courbes d'indifférences sont croissantes et en seconde temps, nous allons déterminer le hessien de la fonction d'utilité espérée pour vérifier la convexité de V .

Soient V_1 et V_2 , respectivement, les dérivées partielles de V par rapport à \bar{W} et σ .

$$\begin{aligned} V_1(\bar{W}, \sigma_W) &= \frac{\partial V(\bar{W}, \sigma_W)}{\partial \bar{W}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} U'(\bar{W} + \zeta\sigma) n(\zeta) d\zeta \end{aligned}$$

Puisque $U'(W) > 0$ pour tout W , la dérivée de l'utilité espérée par la moyenne $V_1(\bar{W}, \sigma_W)$ est strictement positive.

$$V_2(\bar{W}, \sigma_W) = \frac{\partial V(\bar{W}, \sigma_W)}{\partial \sigma}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U'(\bar{W} + \zeta\sigma) \zeta e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta$$

Pour déterminer le signe de cette dérivée, nous recourons à une intégration par partie de la forme :

$$\int f(\zeta) g'(\zeta) d\zeta = [f(\zeta) g(\zeta)] - \int f'(\zeta) g(\zeta) d\zeta$$

où $f'(\zeta) = \zeta e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}$ et $g(\zeta) = U'(\bar{W} + \zeta\sigma)$.

nous aurons donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} U'(\bar{W} + \zeta\sigma) \zeta e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta = - \left[U'(\bar{W} + \zeta\sigma) e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} U''(\bar{W} + \zeta\sigma) \left(-e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} \right) d\zeta$$

puisque $\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} e^{-\zeta^2} = 0$, le terme entre crochets est nul. Donc, V_2 devient :

$$V_2(\bar{W}, \sigma_W) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U''(\bar{W} + \zeta\sigma) \left(-e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} \right) d\zeta$$

Puisque $U''(W) < 0$ quelque soit W , la dérivée de l'utilité espérée par la variance $V_2(\bar{W}, \sigma_W)$ est strictement négative.

Pour démontrer que les courbes d'indifférences sont croissantes, il suffit de calculer le taux du substitution entre l'espérance et la variance :

$$\frac{d\bar{W}}{d\sigma_W|_{V=cste}} = - \frac{V_2(\bar{W}, \sigma_W)}{V_1(\bar{W}, \sigma_W)} > 0$$

Le taux de substitution est positif implique que les courbes d'indifférence sont croissantes dans l'espace écart-type / moyenne. Il reste maintenant à vérifier la convexité de ces courbes. Pour cette raison, nous allons calculer le hessien de la fonction d'utilité espérée.

Soient V_{11} , V_{22} et V_{12} , respectivement, la dérivée seconde de V par rapport à la moyenne, la dérivée seconde de V par rapport à la variance et la dérivée croisée de V par rapport la moyenne et la variance.

$$\begin{aligned}
V_{11}(\bar{W}, \sigma_W) &= \frac{\partial^2 V(\bar{W}, \sigma_W)}{\partial \bar{W}^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U''(\bar{W} + \zeta\sigma) e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta < 0 \\
V_{22}(\bar{W}, \sigma_W) &= \frac{\partial^2 V(\bar{W}, \sigma_W)}{\partial \sigma^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U''(\bar{W} + \zeta\sigma) \zeta^2 e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta < 0 \\
V_{12}(\bar{W}, \sigma_W) &= \frac{\partial^2 V(\bar{W}, \sigma_W)}{\partial \sigma \partial \bar{W}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} U''(\bar{W} + \zeta\sigma) \zeta e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta < 0
\end{aligned}$$

Donc, le hessien H de la fonction V est égale à :

$$H = V_{11}(\bar{W}, \sigma_W) V_{22}(\bar{W}, \sigma_W) - (V_{12}(\bar{W}, \sigma_W))^2$$

qui est strictement positif. Le hessien est positif implique que la fonction d'utilité espérée est concave. La stricte concavité de l'utilité implique la stricte convexité des courbes d'indifférence.

Deuxième partie

**CONTENU EN
INFORMATION DANS LES
PRIX D'OPTIONS :
ESTIMATION DE LA
DENSITÉ NEUTRE AU
RISQUE ET DE LA
FONCTION D'AVERSION AU
RISQUE**

LA DENSITÉ NEUTRE AU RISQUE ET LES PRIX DES OPTIONS

But du chapitre

L'optique principal de ce chapitre est l'estimation la densité neutre au risque DNR selon les trois différentes approches paramétrique, semi-paramétrique et non paramétrique et ce pour les options sur indice CAC 40 pour la période du 1ère janvier 2007 au 31 décembre 2007. Plus précisément, nous utilisons la méthode de kernel et l'arbre binomial implicite pour l'approche non-paramétrique et six méthodes pour l'approche paramétrique et semi-paramétrique : une approximation de la densité neutre au risque fondée sur un calcul numérique de la dérivée seconde du prix de l'option d'achat (call) par rapport aux prix d'exercice (strike) selon Breeden et Litzenberger (1978), un mélange de distribution log-normales élaboré par Melick et Thomas (1997), l'expansion d'Edgeworth autour de la densité log-normale de Jarrow et Rudd (1982), les polynômes d'Hermite proposés par Madan et Mline (1994), le modèle d'Heston et en fin le modèle avec sauts développé par Bates (1991). L'existence de plusieurs méthodes d'estimation de la DNR nous amène à s'interroger sur la meilleure méthode à choisir pour extraire la DNR.

2.1 Introduction

La littérature économique suggère différentes méthodes afin d'estimer la densité neutre au risque de l'actif sous-jacent. Cette densité est reliée aux anticipations des participants sur le marché concernant le processus de prix futur dans un cadre neutre au risque. Les densités neutre au risque DNR sont intéressantes pour un investisseur qui cherche à mesurer comment les anticipations de marché évoluent au cours du temps. Une littérature extrêmement variée a surgi à partir des années quatre-vingt-dix sur la manière la plus appropriée pour estimer la densité neutre au risque. A l'origine de toutes les méthodes, on trouve les célèbres travaux de Breeden et Litzenberger (1978), ils ont été les premiers à déterminer une relation entre les prix des options et la densité neutre au risque (DNR).

Malik et Thomas (1997), développent une méthode non paramétrique pour évaluer les prix des options américaines. Cette méthode a été adoptée par Bahra (1996) et Schernick, Garcia et Tirupattur (1996) sur les options européennes. En effet, il s'agit d'une représentation de DNR fondée sur une combinaison linéaire de densité log-normale. Ces auteurs estiment la DNR du prix de pétrole pendant la crise du Golf et ils trouvent que la densité estimée est différente de la densité obtenue par les méthodes standard. Söderlind et Svensson (1997) montrent comment cette méthode peut être adoptée à différents actifs financiers en insistant sur son utilisation à l'instar de la politique monétaire. Abadir et Rockinger (1997) déterminent des formules fermes des prix d'options en utilisant des fonctions de Kummer (hypergéométrique) comme une base pour la densité neutre au risque. Backus, Foresi, Li et Wu (1997) approchent la distribution conditionnelle du prix de sous-jacent par un développement en série de Gram-Charlier.

Une autre approche est fondée sur les travaux de Jarrow et Rudd (1982) qui a développé une méthode d'évaluation d'option sous l'hypothèse que l'actif sous-jacent ne suit pas un log-normal. Ils montrent que la DNR peut être obtenue par une expansion d'Edgeworth autour de la loi log-normale. Carrodo et Su (1996) utilisent l'idée de Jarrow et Rudd pour déterminer le skewness et le kurtosis dans le prix

d'options S&P500. Adoptant une approche similaire, Madan et Milne (1994), Abken, Madan et Ramamurtie (1996) et Coutant (1999) déterminent la densité neutre au risque à partir d'une approximation polynomiale d'Hermite. De même El Hassan et Kucera (1998) utilisent les développements de Fourier-Hermite pour évaluer les options européennes et américaines sur action.

Notons d'autres recherches récentes, entre autres celle d'Heston (1993), dans son étude, l'auteur fournit une solution quasi-analytique pour les prix d'options dans un environnement de volatilité stochastique dans l'objectif est de fournir un outil d'évaluation des options. Breeden et Litzenberger (1978) montrent que les dérivées secondes de prix de l'option par rapport au strike de l'option (prix d'exercice) donnent la densité neutre au risque. En partant de cette relation (entre le prix d'options et la DNR), Rzepkowski (1996) adopte la méthode d'Heston à l'extraction de la DNR. De même Neuhaus (1995) utilise directement la relation de Breeden et Litzenberger (1978) en travaillant avec la densité de réparation au lieu de la densité neutre au risque. Quant à Rubinstein (1994,1996) et Jackwerth (1996) suggèrent une méthode fondée sur les arbres binomiaux. Rubinstein (1994) développe un arbre implicite pour estimer le prix de l'actif contingent¹ à partir des prix des options. Sa méthode consiste à minimiser l'écart entre les probabilité implicite de l'arbre et les probabilités déterminées à partir de l'arbre de Cox-Ross-Rubinstein (1979). Aït-Sahalia (1996) et Aït-Sahalia et Lo (1998-2000) ont l'idée d'estimer la densité neutre au risque du S&P500 par la technique d'estimation des noyaux (*kernel*). Campa, Chang et Reider (1998) comparent trois méthodes différentes pour estimer la densité neutre au risque du sous-jacent. Ces méthodes sont un lissage du smile par un polynôme de degré trois, un arbre implicite de type Rubinstein et un mélange de loi lognormales.

Galati et Melick (1999) estiment les moments à l'aide d'un mélange de lois log-normale pour comprendre comment sont perçus les interventions de la banque centrale par les traders des marchés de change à partir des options *JPY/USD* entre

1. Un actif contingent est un actif qui paie une unité de bien consommé quand un état du monde a lieu et rien ailleurs.

1993 et 1996. Weinberger (2001) et Anagnar, Bedendo, Hodges et Tompkins (2002) trouvent une forme typique de la distribution risque au neutre implicite du S&P500 après la crise. Panigirtzoglou et Skiadapoulos (2004) étudient la dynamique des distributions implicites et fournissent des algorithmes qui rendent leurs résultats applicables aux évaluations des options et la gestion de risque. Enzo, Handel et Härdle (2006) estiment la densité neutre au risque en utilisant la même approche développée par Aït-Sahalia et Lo (1998). En en fin, Mark, Feike, et Bas (2005) montrent que la densité neutre au risque est une fonction à la fois du rendements et de la volatilité de l'actif sous-jacent.

Dans ce chapitre, on va estimer la densité neutre au risque par les trois différentes approches paramétrique, semi-paramétrique et non-paramétrique pour les options sur indice CAC 40 pour la période du 1^{ère} janvier 2007 au 31 décembre 2007. Plus précisément, on utilise la méthode de kernel et l'arbre binomial implicite pour l'approche non-paramétrique et six méthodes pour l'approche paramétrique et semi-paramétrique : (i) une approximation de la densité neutre au risque fondée sur un calcul numérique de la dérivée seconde du prix de l'option d'achat (call) par rapport aux prix d'exercice (strike) selon Breeden et Litzenberger (1978), (ii) un mélange de distribution log-normales élaboré par Melick et Thomas (1997), (iii) l'expansion d'Edgeworth autour de la densité log-normale de Jarrow and Rudd (1982), (iv) les polynômes d'Hermite suggère par Madan et Mline (1994), (v) Le modèle d'Heston et (v) Le modèle avec sauts développé par Bates (1991).

La suite du chapitre s'organise de la façon suivante. La deuxième section est consacrée à la présentation de l'approche non structurelle de l'estimation de la densité neutre au risque. La troisième section discute l'approche structurelle. La quatrième section décrit notre base de donnée ainsi la présentation des résultats avec une comparaison entre les différentes méthodes. La cinquième section conclut ce chapitre.

2.2 L'estimation de la densité neutre au risque par l'approche non-structurale

2.2.1 La relation de Breeden et Litzenberger

Breeden et Litzenberger (1978) se sont les premiers qui déterminent une relation directe entre les prix d'options et la densité neutre au risque de l'actif sous-jacent. Ils montrent que l'extraction de la DNR peut être fondée sur un calcul numérique de la dérivée seconde du prix de l'option d'achat² (call) par rapport aux prix d'exercice (strike).

$$\begin{aligned} C(x_t, t) &= e^{-r\tau} \langle \max(x_T - x_s, 0) | x_t, t \rangle \\ &= e^{-r\tau} \int_0^\infty \max(x_T - x_s, 0) q(x_T | x_t, t) dx_T \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

avec T l'échéance, C le prix d'un call, r le taux sans risque, x l'actif sous-jacent, x_s le prix d'exercice et $q(\cdot)$ la densité de probabilité.

En dérivant l'équation (2.2.2) une première fois par rapport au strike x_s , on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial x_s} &= -e^{-r\tau} \int_{x_s}^\infty q(x_T) dx_T \\ &= -e^{-r\tau} \left[1 - \int_\infty^{x_s} q(x_T) dx_T \right] \\ &= -e^{-r\tau} [1 - Q(x_T)] |_{x_T=x_s} \\ &= -e^{-r\tau} P(x_T > x_s) \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

avec $Q(\cdot)$ est la Fonction de Distribution Cumulative. Ce résultat signifie que la dérivée première d'une option d'achat européen *Call* par rapport au prix d'exercice *Strike* est égale à moins la probabilité que l'option soit dans la monnaie à l'échéance ($x_T > x_s$). Plus précisément, ce résultat met en exergue le lien entre la dérivée première du Call par rapport au strike et la probabilité neutre au risque que le sous-jacent finisse dans la monnaie à la maturité. Pour illustrer cette relation, on considère tout d'abord le cas où l'option est très en dedans de la monnaie à la date

2. De même, pour un Put P de prix d'exercice x_s et de maturité T :

$$\begin{aligned} P(x_t, t) &= e^{-r\tau} \langle \max(x_s - x_T, 0) | x_t, t \rangle \\ &= e^{-r\tau} \int_0^\infty \max(x_s - x_T, 0) q(x_T | x_t, t) dx_T \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

t , il y aura de fortes chances qu'elle finisse dans la monnaie à l'échéance ($x_t \ll x_s$). La probabilité qu'elle soit exercée étant donc presque égale à 1, l'équation (2.2.3) devient

$$\frac{\partial C}{\partial x_s} \simeq -e^{-r\tau}. \quad (2.2.4)$$

Une augmentation du strike de 1 unité, aura pour conséquence la diminution du prix Call de 1 unité à la date t et de $\exp^{-r\tau}$ unités à la date T . Prenons maintenant le cas contraire où l'option est très en dehors de la monnaie ($x_t \gg x_s$) à la date t , il y aura de très fortes chances qu'elle ne soit pas exercée à l'échéance. La probabilité $Prob(x_T > x_s)$ étant presque nulle, le prix de l'option d'achat sera complètement inélastique aux variations du prix d'exercice et on aura :

$$\frac{\partial C}{\partial x_s} \simeq 0. \quad (2.2.5)$$

Finalement, si aucune supposition par rapport au caractère dans ou en dehors de la monnaie de l'option à l'échéance ne peut être formulée avec exactitude, une augmentation du strike de 1 unité devrait réduire le prix du Call d'un montant compris entre 0 et 1, actualisé au taux sans risque.

En dérivant une seconde fois par rapport au prix d'exercice, on obtient le résultat de Breeden et Litzenberger (1978)³ :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_s^2} \Big|_{x_s=x_T} = e^{-r\tau} q(x_T) \quad (2.2.6)$$

Ceci suggère que la première méthode d'extraire la DNR est une approximation numérique qui applique l'approche de la différence finie sur l'équation (2.2.6). Cette approche suppose qu'il existe suffisamment de prix d'exercice pour évaluer numériquement les dérivées secondes. Mais en réalité, l'option n'est cotée que par un nombre très insuffisant de prix d'exercice qui ne permet pas d'appliquer cette approche. Pour pallier ce problème, on doit recourir à des méthodes de lissage semi-paramétrique ou non-paramétrique où le prix de l'option est en fonction de prix d'exercice.

3. Breeden and Litzenberger (1978) suggère d'évaluer la RND en utilisant l'approximation suivante :

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x_s^2} \approx e^{-r\tau} \frac{C(x_{s,i+1}) - 2C(x_{s,i}) + C(x_{s,i-1}))}{(\Delta x_s)^2}.$$

avec $\Delta x_s = 50$ pour les options sur indices CAC 40. Voir aussi Roncalli (1997).

2.2.2 Les méthodes paramétriques

2.2.2.1 Le modèle de Black-Scholes

Le modèle de Black-Scholes (1973) suppose que la dynamique de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique de la forme suivante :

$$dx_t = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)x_t dt + \sigma x_t dW_t \quad (2.2.7)$$

où μ et σ sont supposés constants, et W_t est un processus de Wiener sous la probabilité subjective P .

Quand le marché est complet, Harrison et Pliska (1981) montrent que, sous la probabilité neutre au risque, l'équation (2.2.7) devient :

$$dx_t = rx_t dt + \sigma x_t dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (2.2.8)$$

Où $W_t^{\mathbb{Q}}$ est un mouvement Brownien sous la probabilité neutre au risque \mathbb{Q} .

Le prix d'un call européen C^{BS} de maturité $T = t + \tau$, de prix d'exercice x_s et de dividende $\delta_{t,\tau}$ est :

$$C^{BS}(x_t, x_s, \tau, r, \delta_{t,\tau}, \sigma) = e^{-r\tau} \int_0^\infty \max[x_T - x_s, 0] f_{BS}(x_T) dx_T \quad (2.2.9)$$

$$= x_t \Phi(d_1) - x_s e^{-r\tau} \Phi(d_2). \quad (2.2.10)$$

avec $\Phi(\cdot)$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et

$$d_1 = \frac{\log(x_t/x_s) + (r - \delta_{t,\tau} + \frac{\sigma^2}{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (2.2.11)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}. \quad (2.2.12)$$

Par conséquent, la DNR est une densité log-normale de moyenne $m = \log(x_t) + (r - \delta_{t,\tau} - \frac{\sigma^2}{2})\tau$ et de variance $s^2 = \sigma^2\tau$:

$$q^{BS}(x_T) = e^{r\tau} \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial x_s^2} \Big|_{x_s=x_T} \quad (2.2.13)$$

$$= \frac{1}{x_T \sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp\left[-\frac{[\log(x_T) - m]^2}{2s^2}\right]. \quad (2.2.14)$$

Tous les paramètres du modèle de Black-Scholes (1973) sont directement observés excepté la volatilité. En revanche, les hypothèses de ce modèle supposent

que les rendements de l'actif sous-jacent suivent une distribution normale. Or plusieurs études empiriques ont montré que les rendements d'un actif ont des densités leptokurtique.

2.2.2.2 Un mélange de distributions log-normales

La méthode proposée par Bahra (1996) et mise en oeuvre par Melick et Thomas (1997), Söderlind (1997) et Levin, Mc Manus et Watt (1998) consiste à écrire la densité du sous-jacent sous la forme d'une somme pondérée de M lois de lognormales indépendantes de paramètres différents :

$$q^{ln}(x_T; \theta) = \sum_{i=1}^M \alpha_i l(x_T, m_i, s_i). \quad (2.2.15)$$

avec $l(x_T, m, \sigma)$ est la densité log-normale du paramètre m la moyenne et s^2 la variance.

$$l(x_T, m, \sigma) = \frac{1}{x_T \sqrt{2\Pi s^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{\log(x_T) - m}{s}\right)^2\right). \quad (2.2.16)$$

Où α_i est la pondération de chacune des distributions dans la somme tel que $\alpha_i > 0$ et $\sum_{i=1}^M \alpha_i = 1$. θ est le vecteur du paramètres à estimer α_i, m_i et s_i pour $i = 1, \dots, M$, et M est le nombre de densité log-normale.

Sous cette hypothèse l'expression du Call, de strike x_s et de maturité T est :

$$\begin{aligned} C^{ln}(x_s, \theta) &= e^{-r\tau} \int_{x_s}^{+\infty} (x_T - x_s) q(x_T; \theta) dx_T \\ &= e^{-r\tau} \int_{x_s}^{+\infty} (x_T - x_s) \sum_{i=1}^M \alpha_i l(x_T, m_i, s_i) dx_T \\ &= e^{-r\tau} \sum_{i=1}^M \alpha_i \int_{x_s}^{+\infty} (x_T - x_s) l(x_T, m_i, s_i) dx_T. \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Finalement, le prix de l'option d'achat est :

$$\begin{aligned} C^{ln}(x_s; \theta) &= e^{-r\tau} \sum_{i=1}^M \alpha_i \left\{ \exp\left(\mu_i + \frac{1}{2}s_i^2\right) \left[1 - \Phi\left(\frac{\log(x_s) - m_i - s_i^2}{s_i}\right)\right] \right. \\ &\quad \left. - x_s \left[1 - \Phi\left(\frac{\log(x_s) - m_i}{s_i}\right)\right] \right\} \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

De plus, il est utile d'imposer la contrainte que, sous la probabilité neutre au risque et en absence d'opportunité d'arbitrage, la moyenne de densité neutre au risque devrait être égale au prix à terme observée :

$$x_t = e^{-r\tau} \langle x_T \rangle = e^{-r\tau} \sum_{i=1}^M \alpha_i \exp \left(m_i + \frac{1}{2} s_i^2 \right). \quad (2.2.19)$$

Le choix du nombre de densité log-normale est contrainte par le nombre faible de prix d'exercice. Pour pallier ce problème, certains auteurs, comme Braha (1997), Jondeau et Rockinger (1997) et Levin, Mc Manus et Watt (1998) montrent que un mélange de deux distributions log-normales décrit généralement les phénomènes de Kurtosis c'est-à-dire un pointe autour de la moyenne et leptokurtique, laquelle se caractérise par des queues de distributions épaisses ("fat-tailed distribution"). Sous cette hypothèse, l'expression de la densité risque neutre devient :

$$q^{ln}(x_T, \alpha, m_1, m_2, s_1, s_2) = \alpha l(x_T, m_1, s_1) + (1 - \alpha) l(x_T, m_2, s_2) \quad (2.2.20)$$

On estime les paramètres des DNR, $\theta = (m_1, m_2, s_1, s_2, \alpha_1, \alpha_2)$ en minimisant les carrés des erreurs d'évaluation liées aux prix des options d'achat, aux prix des options de vente et aux prix du sous-jacent. Le problème consiste à minimiser :

$$\min_{\{m_1, m_2, s_1, s_2, \alpha_1, \alpha_2\}} \left(\sum_{i=1}^N [C_{t,\tau,i} - C_t(x_{s,i}, \tau, \theta)]^2 + \sum_{i=1}^N [P_{t,\tau,i} - P_t(x_{s,i}, \tau, \theta)]^2 + \left[e^{-r\tau} \sum_{j=1}^2 \alpha_j \exp \left(m_j + \frac{1}{2} s_j^2 \right) \right]^2 \right)$$

Le premier terme de cette minimisation minimise la somme des carrés des erreurs de Calls et de Puts. En d'autre termes, les paramètres de la DNR devraient tenir compte de la réalité de marché afin de mieux capter les phénomènes de Kurtosis et leptokurtique de la vraie distribution. Le seconde terme exprime le fait qu'en absence d'opportunité d'arbitrage, la moyenne de densité neutre au risque devrait être égale au prix à terme observée.

2.2.3 Les méthodes semi-paramétriques

Parmi les méthodes semi-paramétriques, on cite la méthode de Jarrow et Rudd (1982) qui montrent que la densité neutre au risque peut être obtenue comme une expansion d'Edgeworth autour de la densité log-normale. De même, Madan et Malne (1994) puis Coutant (1999) proposent un développement d'Hermite autour de la densité gaussienne pour estimer la densité neutre au risque.

2.2.3.1 L'approche semi-paramétrique par l'expansion d'Edgeworth

Cette approche a été élaborée par Jarrow et Rudd (1982) puis par Carrodo et Su (1996), Flamouris et Giamouridis (2002) et Beber et Brandt (2003). Ces auteurs montrent que la densité neutre au risque peut être approchée par une expansion d'Edgeworth autour de la densité log-normale, sous l'hypothèse que la DNR n'est pas log-normale. La construction d'une série d'Edgeworth est similaire à un développement de Taylor appliquée à une fonction de densité. Pour une série de Taylor classique, la fonction est approchée par un polynôme simple au voisinage d'un point donné. Et pour une expansion d'Edgeworth, la DNR est approchée par une expansion autour d'une distribution log-normale.

Soit Q la fonction de distribution cumulée associée à la densité neutre au risque. On définit la fonction caractéristique de x par : $\phi_Q(u) = \int e^{ixu} q(x) dx$. On suppose que les moments de x_T existent jusqu'à l'ordre n , donc les $(n - 1)$ cumulants de la distribution de Q , notés $\kappa_{Q,j}$ existent et sont définis implicitement par la formule suivante :

$$\log(\phi_Q(u)) = \sum_{j=1}^{n-1} \kappa_{Q,j} \frac{(iu)^j}{j!} + o(u^{n-1}) \quad (2.2.21)$$

Il existe les relations suivantes entre les cumulants et les moments jusqu'à l'ordre quatre :

$$\begin{cases} \kappa_{Q,1} = \langle x_T \rangle \\ \kappa_{Q,2} = V[x_T] \\ \kappa_{Q,3} = \langle (x_T - \langle x_T \rangle)^3 \rangle \\ \kappa_{Q,4} = \langle (x_T - \langle x_T \rangle)^4 \rangle - 3V[x_T]^2 \end{cases}$$

Jarrow et Rudd (1982) montrent que l'expansion d'Edgeworth à l'ordre quatre de la distribution de probabilité (la vraie distribution) autour de la distribution lognormale (la distribution approchée) peut s'écrire, en imposant l'égalité des premiers moment des densités approchées et réelles ($\kappa_{Q,1} = \kappa_{L,1}$), comme :

$$q^{edg}(x) = l(x) + \frac{\kappa_{Q,2} - \kappa_{L,2}}{2!} \frac{d^2 l(x)}{dx^2} - \frac{\kappa_{Q,3} - \kappa_{L,3}}{3!} \frac{d^3 l(x)}{dx^3} + \frac{(\kappa_{Q,4} - \kappa_{L,4}) + 3(\kappa_{Q,2} - \kappa_{L,2})^2}{4!} \frac{d^4 l(x)}{dx^4} + \epsilon(x) \quad (2.2.22)$$

où $\epsilon(x)$ prend en compte les termes négligés dans l'expansion. Les différents termes de l'expansion correspondent aux ajustements de la variance, de la skewness et de la kurtosis.

Jarrow et Rudd (1982) montrent que, sous la densité approximative, le prix d'une option européen d'achat, de prix d'exercice x_s , peut être approché par :

$$\begin{aligned} C^{edg}(x_s, t) &= e^{-r\tau} \int_{x_s}^{\infty} (x_T - x_s) q(x_T) dx_T \\ &\approx e^{-r\tau} \int_{x_s}^{\infty} (x_T - x_s) l(x_T) dx_T + e^{-r\tau} \frac{\kappa_{Q,2} - \kappa_{L,2}}{2!} \int_{x_s}^{\infty} (x_T - x_s) \frac{d^2 l(x_T)}{dx_T^2} dx_T \\ &\quad - e^{-r\tau} \frac{\kappa_{Q,3} - \kappa_{L,3}}{3!} \int_{x_s}^{\infty} (x_T - x_s) \frac{d^3 l(x_T)}{dx_T^3} dx_T \\ &\quad + e^{-r\tau} \frac{(\kappa_{Q,4} - \kappa_{L,4}) + 3(\kappa_{Q,2} - \kappa_{L,2})^2}{4!} \int_{x_s}^{\infty} (x_T - x_s) \frac{d^4 l(x_T)}{dx_T^4} dx_T. \end{aligned}$$

Il est clair que le premier terme de cette équation correspond bien au prix d'un Call dans un modèle de Black-Scholes. De plus, la densité lognormale a la propriété suivante :

$$\int_{x_s}^{\infty} (x_T - x_s) \frac{d^j l(x_T)}{dx_T^j} dx_T = \frac{d^{j-2} l(x_T)}{dx_T^{j-2}} \Big|_{x=x_s}, \quad \text{pour } j \geq 2. \quad (2.2.23)$$

On déduit le prix d'un Call européen comme :

$$\begin{aligned} C^{edg}(x_s, t) &\approx C^{BS}(x_s, t) - e^{-r\tau} \frac{\kappa_{Q,3} - \kappa_{L,3}}{3!} \frac{dl(x_T)}{dx_T} \Big|_{x_T=x_s} \\ &\quad + e^{-r\tau} \frac{(\kappa_{Q,4} - \kappa_{L,4}) + 3(\kappa_{Q,2} - \kappa_{L,2})^2}{4!} \frac{d^2 l(x_T)}{dx_T^2} \Big|_{x_T=x_s} \quad (2.2.24) \end{aligned}$$

Les quatre premiers cumulants de la loi log-normale sont obtenus de la façon suivante :

$$\begin{cases} \kappa_{L,1} = x_t e^{r\tau}, \\ \kappa_{L,2} = [\kappa_{L,1}\vartheta]^2, \\ \kappa_{L,3} = [\kappa_{L,1}\vartheta]^3 (3\vartheta + \vartheta^3), \\ \kappa_{L,4} = [\kappa_{L,1}\vartheta]^4 (16\vartheta^2 + 15\vartheta^4 + 6\vartheta^6 + \vartheta^8) \end{cases}$$

Où $\vartheta = (e^{\sigma^2\tau} - 1)^{1/2}$ et où la première relation vient de l'évaluation neutre au risque.

Jarrow et Rudd (1982) suggèrent d'identifier le moment du seconde ordre en imposant $\kappa_{L,2} = \kappa_{Q,2}$. Cette hypothèse est également justifiée sur des bases numériques par Carrodo et Su (1996), qui notent qu'en l'absence de cette condition des problèmes de multicolinéarité apparaissent entre les moments du second et quatrième ordre. Carrodo et Su (1996) proposent, au lieu d'estimer les cumulants dans (2.2.23), ils estiment directement la skewness et la kurtosis par :

$$\begin{aligned} \gamma_{Q,1} &= \frac{\kappa_{Q,3}}{(\kappa_{Q,2})^{3/2}} = 3\vartheta + \vartheta^3, \\ \gamma_{Q,2} &= \frac{\kappa_{Q,4}}{(\kappa_{Q,2})^2} = 16\vartheta^2 + 15\vartheta^4 + 6\vartheta^6 + \vartheta^8. \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

Ces expressions sont également valables pour la densité log-normale. La skewness et la kurtosis de la densité log-normale peuvent être facilement calculer à partir des cumulants ci-dessus. Sous l'hypothèse de l'égalité des cumulants second ordre, le prix d'un Call européen est :

$$\begin{aligned} C^{edg}(x_s, t) &\approx C^{BS}(x_s, t) - e^{-r\tau} (\gamma_{Q,1} - \gamma_{L,1}) \frac{\kappa_{L,2}^{3/2}}{3!} \frac{dl(x_T)}{dx_T} \Big|_{x_T=xs} \\ &\quad + e^{-r\tau} (\gamma_{Q,2} - \gamma_{L,2}) \frac{\kappa_{L,2}^2}{4!} \frac{d^2l(x_T)}{dx_T^2} \Big|_{x_T=xs} \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

En utilisant cette expression, il est facile d'estimer avec un programme de moindres carrés non linéaires la volatilité implicite σ^2 , la skewness, $\gamma_{Q,1}$, et la kurtosis, $\gamma_{Q,2}$. L'expression de la DNR peut être obtenue en dérivant deux fois l'équation (2.2.26)

par rapport à x_s :

$$q^{edg}(x_T) = l(x_T) - (\gamma_{Q,1} - \gamma_{L,1}) \frac{\kappa_{L,2}^{3/2}}{6} \frac{d^3 l(x_T)}{dx_T^3} + (\gamma_{Q,2} - \gamma_{L,2}) \frac{\kappa_{L,2}^2}{24} \frac{d^4 l(x_T)}{dx_T^4}. \quad (2.2.27)$$

où les dérivées partielles peuvent être calculées par itération, en utilisant :

$$\frac{dl(x_T)}{dx_T} = - \left(1 + \frac{\log(x_T) - m}{\sigma^2 \tau} \right) \frac{l(x_T)}{x_T}. \quad (2.2.28)$$

$$\frac{d^2 l(x_T)}{dx_T^2} = - \left(2 + \frac{\log(x_T) - m}{\sigma^2 \tau} \right) \frac{1}{x_T} \frac{dl(x_T)}{dx_T} - \frac{1}{x_T^2 \sigma^2} l(x_T). \quad (2.2.29)$$

$$\frac{d^3 l(x_T)}{dx_T^3} = - \left(3 + \frac{\log(x_T) - m}{\sigma^2 \tau} \right) \frac{1}{x_T} \frac{d^2 l(x_T)}{dx_T^2} - \frac{2}{x_T^2 \sigma^2} \frac{dl(x_T)}{dx_T} + \frac{1}{x_T^3 \sigma^2} l(x_T), \quad (2.2.30)$$

$$\frac{d^4 l(x_T)}{dx_T^4} = - \left(4 + \frac{\log(x_T) - m}{\sigma^2 \tau} \right) \frac{1}{x_T} \frac{d^3 l(x_T)}{dx_T^3} - \frac{3}{x_T^2 \sigma^2} \frac{d^2 l(x_T)}{dx_T^2} + \frac{3}{x_T^3 \sigma^2} \frac{dl(x_T)}{dx_T} - \frac{2}{x_T^4 \sigma^2} l(x_T), \quad (2.2.31)$$

avec $m = \log(x_t) + (r - \sigma^2/2)\tau$. La DNR de l'expansion d'Edgeworth est un polynôme dont ces coefficients dépendent de la skewness et la kurtosis.

2.2.3.2 L'approche semi-paramétrique par l'expansion d'hermite

Cette méthode a été développée par Madan et Milne (1994) et mise en oeuvre dans Abken, Madan et Ramamurtie (1996), Coutant (1999) et Jondeau, et Rockinger (2001).

Madan et Milne (1994), Abken, Madan et Ramamurtie (1996) supposent que, sous la mesure de référence, le processus d'un actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique :

$$\begin{aligned} x_T &= x_t \exp \left(\mu \tau - \frac{1}{2} s^2 \tau + sz \right) \\ \Rightarrow z &= \frac{\log(x_T/x_t) - (\mu \tau - \frac{1}{2} s^2 \tau)}{s} \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

avec $s = \sigma \sqrt{\tau}$ est la volatilité. Le pay-off d'une option d'achat européen, en fonction de z , est :

$$\begin{aligned} c(x_t, x_s, \mu, s, \tau) &= \max \left\{ x_t \exp \left(\mu \tau - \frac{1}{2} s^2 \tau + sz \right) - x_s, 0 \right\} \\ &= g(z), \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

Ainsi le prix d'une option d'achat peut être écrite comme :

$$\begin{aligned} C^{her}(x_t, x_s, \mu, s, \tau) &= e^{-r\tau} \int_0^{+\infty} c(x_t, x_s, \mu, s, \tau) q_z(z) dz \\ &= e^{-r\tau} \int_0^{+\infty} g(z) q_z(z) dz \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

où z est une variable aléatoire centrée réduite, $g(z)$ est le pay-off de l'actif sous-jacent et q_z est la densité neutre au risque de la variable z . Il est aisé de déterminer la DNR dans l'espace de x_T à partir de l'espace de z en effectuant un simple changement de variable :

$$q^{her}(x_T) = q_z \left(\frac{\log(x_T/x_t) - (\mu\tau - \frac{1}{2}s^2)}{s} \right) \times \frac{1}{sx_T}. \quad (2.2.35)$$

Madan et Milne montrent que tout pay-off $g(z)$ d'un actif contingent s'écrit d'une façon unique comme une combinaison linéaire de tous les éléments de la base, donc il existe des constantes réelles a_k telle que :

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_k(z), \quad (2.2.36)$$

avec $a_k = \int_z g(z) h_k(z) \Phi(z) dz$, où $\Phi(z)$ est une distribution gaussienne et $h_k(z)$ désigne un polynôme d'hermite normalisé à variance unitaire :

$$\begin{cases} h_0(z) = 1, \\ h_1(z) = z, \\ h_2(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(z^2 - 1), \\ h_3(z) = \frac{1}{\sqrt{6}}(z^3 - 3z), \\ h_4(z) = \frac{1}{\sqrt{24}}(z^4 - 6z^2 + 3). \end{cases}$$

Par conséquence, le prix d'une option d'achat est égale à :

$$C^{her}(x_t, x_s, \mu, s, \tau, r) = e^{-r\tau} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_z h_k(z) q_z dz. \quad (2.2.37)$$

Madan et Milne (1994) supposent que la DNR de z peut être obtenue en multipliant la densité normale standard avec un coefficient λ :

$$q^{her}(z) = \lambda(z) \Phi(z). \quad (2.2.38)$$

Le coefficient de perturbation est ensuite exprimé par une combinaison linéaire de polynômes d'hermite :

$$\lambda(z) = e^{r\tau} \sum_{l=0}^{\infty} \pi_l h_l(z) \quad (2.2.39)$$

La DNR peut être réécrite sous la forme comme suivante :

$$q^{her}(z) = \Phi(z) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \pi_l h_l(z) \right) \quad (2.2.40)$$

π_l est le prix implicite du risque de l'actif contingent élémentaire $h_l(z)$. En théorie, une série infinie de polynômes d'hermite donne une approximation parfaite mais pour des raisons pratiques, selon Abken et al (1996), l'ordre de développement sera limité à quatre. Pour que $q(z)$ soit une densité de probabilité, l'intégrale doit être égale à 1, il faut que $\pi_0 = e^{-r\tau}$. De plus, ils supposent que $\pi_1 = \pi_2 = 0$. Sous ces hypothèses la densité neutre au risque devient :

$$\begin{aligned} q^{her}(z) &= \Phi(z) \left(e^{r\tau} \sum_{l=0}^4 \pi_l h_l(z) \right) \\ &= \Phi(z) e^{r\tau} (e^{-r\tau} + \pi_3 h_3(z) + \pi_4 h_4(z)) \\ &= \Phi(z) \left(1 + \frac{b_3}{\sqrt{6}} (z^3 - 3z) + \frac{b_4}{\sqrt{24}} (z^4 - 6z^2 + 3) \right) \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

où $b_i = e^{r\tau} \pi_i$, $i = 3, 4$ les prix implicites associés à la skewness et kurtosis. Il est important de souligner que contrairement à la densité d'Edgeworth, b_3 et b_4 ne correspondront pas à la skewness et à la kurtosis de l'actif sous-jacent x_T , mais à la skewness et la kurtosis de z . Enfin, la skewness et la kurtosis sont donnés par :

$$Skewness [z] = \sqrt{6} b_3 \quad (2.2.42)$$

$$Kurtosis [z] = 3 + \sqrt{24} b_4 \quad (2.2.43)$$

Les paramètres σ , b_3 et b_4 sont estimés en utilisant l'équation (2.4.3). L'expression générale du prix d'une option d'achat est :

$$\begin{aligned} C^{her}(x_t, x_s, \mu, s, \tau, r) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} a_k \pi_l \int_z h_l(z) h_k(z) \Phi(z) dz \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \pi_k \end{aligned} \quad (2.2.44)$$

On suppose que la somme est tronquée à l'ordre quatre, on obtient :

$$C^{her}(x_t, x_s, \mu, s, \tau, r) = e^{-r\tau} a_0 + \pi_3 a_3 + \pi_4 a_4 \quad (2.2.45)$$

Pour estimer les coefficients a_k , Abken, Madan et Ramamurtie (1998) utilisent la fonction génératrice pour une option d'achat, définie comme :

$$G(u, x_t, x_s, \mu, s, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(u, x_t, x_s, \mu, s, \tau) e^{-\frac{1}{2}(z-u)^2} dz, \quad (2.2.46)$$

Les coefficients a_k s'expriment alors dans la base de polynôme d'hermite comme :

$$a_k(x_t, x_s, \mu, s, \tau) = \frac{\partial^k G(u, x_t, x_s, \mu, s, \tau)}{\partial u^k} \Big|_{u=0} \frac{1}{\sqrt{k!}} \quad (2.2.47)$$

où :

$$G(u, x_t, x_s, \mu, s, \tau) = x_t e^{(\mu\tau + su)} \Phi(d_1(u)) - x_s \Phi(d_2(u)) \quad (2.2.48)$$

avec $d_1(u) = \log\left(\frac{x_t}{x_s}\right) + \left(\frac{\mu\tau}{s} + \frac{s}{2}\right) + u$ et $d_2(u) = d_1(u) - s$. Finalement, les coefficients a_k sont :

$$\begin{aligned} a_0 &= x_t e^{(\mu\tau)} \Phi(d_1) - x_s \Phi(d_2) \\ a_1 &= s x_t e^{\mu\tau} \Phi(d_1) + x_t e^{(\mu\tau)} \Phi(d_1) - x_s \Phi(d_2) \\ a_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[s^2 x_t e^{(\mu\tau)} \Phi(d_1) + 2s x_t e^{(\mu\tau)} \Phi(d_1) + x_t e^{(\mu\tau)} \Phi'(d_1) - x_s \Phi'(d_2) \right] \\ a_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[s^3 x_t e^{(\mu\tau)} \Phi(d_1) + 3s^2 x_t e^{(\mu\tau)} \Phi(d_1) + 3s x_t e^{(\mu\tau)} \Phi'(d_1) + x_t e^{(\mu\tau)} \Phi''(d_1) - x_s \Phi''(d_2) \right] \\ a_4 &= \frac{1}{\sqrt{24}} \left[s^4 x_t e^{(\mu\tau)} \Phi(d_1) + 4s^3 x_t e^{(\mu\tau)} \Phi(d_1) + 6s^2 x_t e^{(\mu\tau)} \Phi'(d_1) + 4s x_t e^{(\mu\tau)} \Phi''(d_1) \right. \\ &\quad \left. + x_t e^{(\mu\tau)} \Phi'''(d_1) - x_s \Phi'''(d_2) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.49)$$

Cette méthode a été appliquée par Coutant (1999), Jondeau et Rockinger (2001) aux prix des options. En revanche, Jondeau et Rockinger (2001) ont également montré comment les conditions sur les b_3 et b_4 pourraient être imposées afin que la densité neutre au risque reste positive.

2.2.4 Les méthodes non-paramétriques

On va étudier dans ce paragraphe les méthodes non-paramétriques. La principale caractéristique de cette approche par rapport aux approches semi-paramétriques et paramétriques est qu'elle ne nécessite aucune hypothèse ni sur l'évaluation du processus de sous-jacent ni à la famille de densité à laquelle elle appartient. On présente, ici, deux méthodes non-paramétriques. En premier lieu, l'arbre binomial élaboré par Rubinstien(1994), en seconde lieu la méthode de kernel élaborée par Aït-Sahalia et Lo (2000).

2.2.4.1 L'arbre binomial implicite

Cette méthode a été élaborée par Rubinstien(1994) et mise en oeuvre par Jackwerth et Rubinstein (1996) et Jackwerth (1999). Elle consiste à estimer la densité neutre au risque dans un univers neutre au risque en utilisant l'arbre binomial standard à N pas de Cox-Ross-Rubinstein(1979). La spécification de cette méthode, par rapport aux autres, est de trouver une densité dans un cadre discret. L'estimation de la DNR par cette méthode se base sur deux étapes.

Dans une première étape, on va construire un arbre binomial standard à N pas. On note par x_j pour tout $j = 1 \dots N$ les valeurs de sous-jacent obtenues à la dernière étape de l'arbre de Cox-Ross-Rubinstein et P'_j la probabilité du passage d'un noeud j au noeud $j + 1$. Ces probabilités sont calculées de la manière suivante :

$$P'_j = \frac{N!}{j!(N-j)!} p'^j (1-p')^{(N-j)} \quad (2.2.50)$$

avec p' est la probabilité risque neutre⁴ d'un mouvement à la hausse d'un noeud à un autre. Dans une deuxième étape, il s'agit de déterminer les probabilités neutres au risque P_j , à partir des prix d'options cotées sur le marché à la date de l'estimation. Il suffit donc de résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{P_j} \sum_{j=1}^N (P_j - P'_j)^2 \quad (2.2.51)$$

sous les contraintes

4. $p' = \frac{r-d}{u-d}$, où $u = e^{\sigma\sqrt{\tau}}$ et $d = \frac{1}{u}$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N P_j = 1 \\ P_j \geq 0 \\ C_{\tau,i} = e^{-r\tau} \sum_{j=1}^N P_j \max(x_j - x_{s,i}, 0) \end{cases}$$

avec $i = 1, \dots, m$ où m étant le nombre de prix d'exercices, pour lesquels m options sont cotées.

La première contrainte montre que la somme de probabilités neutres au risques doit être égale à un pour que cette densité forme une densité de probabilité. La deuxième contrainte assure que le prix théorique du sous-jacent calculé à partir de l'arbre binomial de Rubinstein doit être égale aux prix observés sur le marché. Et la dernière contrainte assure, de même que la deuxième, que le prix théorique de l'option calculé à partir de l'arbre binomial est égale au prix observé sur le marché. Rubinstein (1994) et Jackwerth et Rubinstein (1996) proposent trois autres programmes d'optimisation :

1.

$$\min_{P_j} \sum_{j=1}^N |P'_j - P_j|, \quad (2.2.52)$$

2.

$$\min_{P_j} \sum_{j=1}^N \left(\frac{(P_j - P'_j)^2}{P'_j} \right) \quad (2.2.53)$$

3.

$$\max_{P_j} \sum_{j=1}^N P_j \log \left(\frac{P_j}{P'_j} \right) \quad (2.2.54)$$

La première mesure est une mesure fondée sur les écarts absolus, la deuxième est fondée sur les écarts en pourcentage, la troisième correspond à la recherche du maximum d'entropie.

2.2.4.2 La méthode de noyau (*kernel*)

En utilisant le résultat de Breeden et Litzenberger (1978), Aït-Sahalia et Lo (1998-2000) proposent une méthode non-paramétrique pour déterminer la densité

neutre au risque. Ils estiment cette densité par la technique d'estimation de noyau *kernel*.

Soient $C(x_t, x_s, \tau, r_t, \delta_t)$ le prix d'une option d'achat Call d'un actif sous-jacent, de prix d'exercice x_s , de maturité $(t + \tau)$, et \widehat{C}_i le i ème prix d'option observé, n le nombre d'observations et r_t le taux sans risque. On note aussi $Z_i = [x_t \ x_s \ \tau \ r_t, \delta_t]'$, le vecteur caractéristique d'une option d'achat. Soit le problème de minimisation suivant :

$$\min_{C(\cdot) \in \Gamma} \sum_{i=1}^n \left[\widehat{C}_i - C(Z_i) \right]^2, \quad (2.2.55)$$

où Γ est l'espace des fonctions deux fois continûment différentiable.

La solution de ce problème de minimisation est donné par l'espérance conditionnelle de C connaissant les Z_i avec $i = 1 \dots n$. Pour estimer cette espérance conditionnelle, Aït-Sahalia et Lo (1998) emploient une technique statistique appelée *Régression par les noyaux* (Non-parametric Kernel regression). Cette technique consiste à produire un estimateur \widehat{C} de l'espérance conditionnelle de C sachant les $[x_t, x_s, \tau, r_t, \delta_t]'$ sans avoir estimé aucun paramètre. La technique de régression par le noyau consiste à retenir pour chaque variable de Z , une fonction de *kernel* $k^j(Z)$ d'ordre d , où d est le nombre de variable explicatives (ici 5). La fonction $k(Z - Z_i)$, comme une fonction de Z , a un certain écart par rapport au point observé Z_i . Pour changer cette écarte Aït-Sahalia et Lo utilisent une bande h_j (fenêtre ou *Bandwidth*) pour former une nouvelle fonction de densité $\left(\frac{1}{h_j}\right) k\left(\frac{Z-Z_i}{h_j}\right)$. Un estimateur C^{ker} est donné par l'expression suivante et est appelé estimateur kernel de *Nadaraya-Waston* :

$$C^{ker}(Z) = \frac{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^5 \frac{1}{h_j} k_j\left(\frac{Z - Z_i}{h_j}\right) \widehat{C}_i}{\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^5 \frac{1}{h_j} k_j\left(\frac{Z - Z_i}{h_j}\right)} \quad (2.2.56)$$

On remarque que cet estimateur dépend négativement de nombre de régresseurs, c'est à dire si le nombre de régresseurs est élevé, l'estimation sera moins précise. Donc pour pallier ce problème, Aït-Sahalia et Lo (2000) emploient l'approche semi-paramétrique pour réduire le nombre de régresseurs. On suppose que le prix d'une option d'achat est donné par le modèle de Black-Scholes (1973) mais la volatilité sera une fonction non-paramétrique $\sigma^{ker}(x_s/F_{t,\tau})$ où $F_{t,\tau}$ est le prix futur, donc le

prix d'une option d'achat s'écrit comme suivant :

$$C^{ker}(x_t, x_s, \tau, r_t, \delta_t) = C^{BS}(F_{t,\tau}, x_s, \tau, r_t, \sigma^{ker}(x_s/F_{t,\tau})). \quad (2.2.57)$$

On suppose que la fonction C^{ker} définie par l'équation (2.2.57) satisfait toutes les conditions définies au sens de Merton (1973) pour quelle soit une formule d'évaluation des options. Dans ce modèle semi-paramétrique, on a juste besoin d'une regression de kernel à deux dimension ($\tilde{d} = 2$) et $\tilde{z} \equiv [x_s/F_{t,\tau}, \tau]'$ et l'estimateur kernel de *Nadaraya-Waston* $\langle \sigma | x_s/F_{t,\tau}, \tau \rangle = \sigma^{ker} = \sigma(x_s/F_{t,\tau})$ est :

$$\sigma^{ker}(x_s/F_{t,\tau}) = \frac{\sum_{i=1}^n k_{x_s/F} \left(\frac{x_s/F_{t,\tau} - x_{s,i}/F_{t_i,\tau_i}}{h_{x_s/F}} \right) k_{\tau} \left(\frac{\tau - \tau_i}{h_{\tau}} \right) \sigma_i}{\sum_{i=1}^n k_{x_s/F} \left(\frac{x_s/F_{t,\tau} - x_{s,i}/F_{t_i,\tau_i}}{h_{x_s/F}} \right) k_{\tau} \left(\frac{\tau - \tau_i}{h_{\tau}} \right)} \quad (2.2.58)$$

avec σ_i est la volatilité implicite de Black-Scholes (1973) du prix C_i . Les fonctions de *kernel* $k_{x_s/F}$ et k_{τ} et les bandwidth $h_{x_s/F}$ et h_{τ} sont choisies pour optimiser les propriétés asymptotique de la dérivée seconde de C^{ker} . Sous ces hypothèses, la densité neutre au risque est la dérivée seconde de l'option d'achat déterminée par l'équation (2.2.57) par rapport au strike :

$$q^{ker}(x_T) = e^{r_{i,\tau}\tau} \left[\frac{\partial^2 C^{ker}(x_t, x_s, \tau, r_t, \delta_t)}{\partial x_s^2} \right] \Big|_{x_s=x_T}. \quad (2.2.59)$$

Comme on a vu au début de ce chapitre que la célèbre relation de Breeden et Litzenberger (1978) entre les prix d'options et la densité neutre au risque nécessite un nombre élevé de prix d'exercice pour évaluer numériquement les dérivées secondes. Cependant, l'option n'est cotée que pour un nombre très insuffisant de prix de strike. L'application numérique de cette méthode (voir la section suivante) confirme bien cette inconvenient.

2.3 L'estimation de la densité neutre au risque par l'approche structurelle

Dans cette section, on va présenter deux méthodes de l'approche structurelle : en premier temps le modèle à saut et en second temps le modèle à volatilité stochastique ou encore le modèle d'Heston.

2.3.1 Le modèle à sauts

La modélisation de l'actif sous-jacent selon le modèle de Black-Scholes (1973) est insuffisante et un raffinement s'avère nécessaire. Les événements rares peuvent entraîner des variations brutales des cours. Pour modéliser de tels phénomènes, on est amené à traduire, plus le processus log-normal, un processus de poisson, c'est à dire la somme d'un mouvement brownien géométrique et d'un processus à saut de Poisson. Ce processus de saut permet de prendre en compte les effets de skewness et de kurtosis.

Le processus suivi par l'actif en question dans un univers risque neutre est donnée par l'équation suivante :

$$dx_t = (r_t - \lambda \langle k \rangle) x_t dt + k x_t dW_t + k x_t dq_t \quad (2.3.1)$$

où q_t est un compteur de poisson, λ est la fréquence de saut et k le nombre de sauts éventuels.

Bates (1991) montrent que dans le cas d'une diffusion de n sauts, le prix d'un Call s'écrit :

$$C^{saut}(x_t, t, \tau, x_s) = e^{-r_t \tau} \sum_{i=0}^{\infty} P(n_{sauts}) \langle \max(x_T - x_s, 0) / n_{sauts} \rangle \quad (2.3.2)$$

où $P(n_{sauts}) = \frac{(\lambda \tau)^n}{n!} e^{-\lambda \tau}$.

Pour simplifier, Ball et Torous (1985) et Malz (1997) supposent que, sur l'horizon de l'option, il y aura, au plus, un saut. Sous cette hypothèse, le modèle est spécifié selon l'évaluation du sous-jacent, c'est à dire sans saut ou avec un saut unique. Dans cette version de Bernoulli d'une diffusion avec saut, le prix d'une option d'achat s'écrit simplement comme suit :

$$\begin{aligned} C^{saut}(x_t, t, \tau, x_s) &= e^{-r_t \tau} \sum_{i=0}^1 P(n_{sauts}) \langle \max(x_T - x_s, 0) / n_{sauts} \rangle \\ &= (1 - \lambda \tau) \left[\frac{x_t}{1 + \lambda \kappa \tau} N(d_1 + \sigma \sqrt{\tau}) - x_s e^{-r_t \tau} N(d_1) \right] \\ &\quad + \lambda \tau \left[\frac{x_t}{1 + \lambda \kappa \tau} (1 + \kappa) N(d_2 + \sigma \sqrt{\tau}) - x_s e^{-r_t \tau} N(d_2) \right] \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

avec :

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{x_t}{x_s}\right) - \log(1 + \lambda\kappa\tau) + \left(r_t - \frac{\sigma^2}{2}\tau\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (2.3.4)$$

$$d_2 = \frac{\log\left(\frac{x_t}{x_s}\right) - \log(1 + \lambda\kappa\tau) + \log(1 + \kappa) + \left(r_t - \frac{\sigma^2}{2}\tau\right)}{\sigma\sqrt{\tau}} \quad (2.3.5)$$

où $(1 - \lambda\tau)$ représente la probabilité d'absence de saut avant l'échéance.

On peut facilement démontrer que le prix d'une option d'achat s'écrit simplement comme une combinaison de deux prix d'option calculée par le modèle de Black (1976) :

$$\begin{aligned} C^{saut}(x_t, t, \tau, x_s | \theta) &= (1 - \lambda\tau) C^B\left(\frac{x_t}{1 + \lambda\kappa\tau}, \tau, x_s | \theta\right) \\ &+ (\lambda\tau) C^B\left(\frac{x_t}{1 + \lambda\kappa\tau}(1 + \kappa), \tau, x_s | \theta\right) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

Cette technique n'est autre qu'un cas particulier de celle de mélange de deux lognormales (Vu ci-dessus). Dans ce cas, la densité neutre au risque s'écrit de la manière suivante :

$$q^{saut}(x_T, x_t, t, \tau, x_s | \theta) = (1 - \lambda\tau) l(x_T, \alpha, \beta) + \lambda\tau l(x_T, \alpha + \log(1 + \kappa), \beta) \quad (2.3.7)$$

où : $l(x_T, \alpha, \beta)$ est définie par l'expression (2.2.16) avec :

$$\alpha = \log(x_t) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma\right)^2\tau,$$

et,

$$\beta = \sigma\sqrt{\tau}.$$

$\theta = (\sigma, \lambda, \kappa)'$ sont ensuite estimés à l'aide du programme (2.4.3).

2.3.2 Le Modèle à volatilité stochastique : Le modèle d'Heston

Les modèles de diffusion de l'actif sous-jacent, en particulier le modèle de Black-Scholes (1973), supposent que la volatilité de ce dernier est une constante. Or, dans le cas où l'actif sous-jacent enregistre des fortes fluctuations sur une courte période, il serait nécessaire de les modéliser avec un processus à volatilité stochastique. On

suppose maintenant que le dynamique du prix du sous-jacent suit un modèle à volatilité stochastique d'Heston (1993) de la forme :

$$dx_t = \mu_t x_t dt + \sqrt{V_t} x_t dW_t^1 \quad (2.3.8)$$

$$dV_t = \kappa (\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2 \quad (2.3.9)$$

$$dW_t^1 dW_t^2 = \rho dt \quad (2.3.10)$$

Les paramètres du modèle d'Heston sont la volatilité de long terme $\sqrt{\theta}$, la vitesse de retour à la moyenne κ , la volatilité de la volatilité σ , ρ la corrélation entre les deux mouvements browniens W_t^1 et W_t^2 et enfin, $\sqrt{V_t}$ est la volatilité instantanée. Le prix d'un Call $C(x_t, x_s, t, \tau)$ de strike x_s et de maturité $(t+\tau)$ va dépendre du prix de sous-jacent, de la volatilité instantanée et de la date courante, tel que $C(x_t, x_s, t, \tau) = \Theta(x_t, V_t, t)$. Dans le cadre du modèle d'Heston, en utilisant le théorème de Cox, Ingersoll et Ross (1985), la valeur de l'option, $\Theta(x_t, V_t, t)$, doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V x^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &+ \rho \sigma V x \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial V} + \frac{1}{2} \sigma^2 V \frac{\partial^2 \Theta}{\partial V^2} + r x \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\ &+ \left\{ \kappa [\theta - V] - \Lambda(x, V, t) \sigma \sqrt{V} \right\} \frac{\partial \Theta}{\partial V} - r \Theta + \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Avec $\Lambda(x, V, t)$ est appelé la prime de risque de la volatilité. Heston suppose que ce prime de risque est proportionnelle à la volatilité, c-à-d :

$$\Lambda(x, V, t) = k \sqrt{V} \quad (2.3.12)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Lambda(x, V, t) \sigma \sqrt{V} &= k \sigma V_t \quad \text{pour tout } k \text{ constant} \\ &= \lambda(x, V, t) \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Sous la mesure neutre au risque, le prix de l'option est égale :

$$\text{Valeur de l'option} = \left\langle e^{r(T-t)} H(T) \right\rangle_Q \quad (2.3.14)$$

avec $H(T)$ est le pay-off défini par $\max(x_T - x_s, 0)$ et r le taux sans risque. Le passage de la mesure de probabilité subjective, noté \mathbb{P} , à la mesure de probabilité

neutre au risque, note \mathbb{Q} , est réalisé par le théorème de Girsavov. En particulier, on a :

$$d\widetilde{W}_t^2 = dW_t^2 + \Lambda(x, V, t)dt \quad (2.3.15)$$

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t (\nu_s^2 + \Lambda(x, V, s)^2) ds - \int_0^t \nu_s dW_s^1 - \int_0^t \Lambda(x, V, s) dW_s^2 \right\} \quad (2.3.16)$$

$$\nu_t = \frac{\mu - r}{\sqrt{V_t}} \quad (2.3.17)$$

avec $\{\widetilde{W}_t^1\}_{t \geq 0}$ et $\{\widetilde{W}_t^2\}_{t \geq 0}$ des mouvements browniens dans l'univers neutre au risque \mathbb{Q} . Sous cette nouvelle mesure de probabilité \mathbb{Q} , les équations (2.3.8), (2.3.9) et (2.3.10) deviennent :

$$dx_t = r_t x_t dt + \sqrt{V_t} x_t d\widetilde{W}_t^1 \quad (2.3.18)$$

$$dV_t = \kappa^* (\theta^* - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} d\widetilde{W}_t^2 \quad (2.3.19)$$

$$d\widetilde{W}_t^1 d\widetilde{W}_t^2 = \rho dt \quad (2.3.20)$$

et l'équation (2.3.11) devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} V x^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} &+ \rho \sigma V x \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x \partial V} + \frac{1}{2} \sigma^2 V \frac{\partial^2 \Theta}{\partial V^2} + r x \frac{\partial \Theta}{\partial x} \\ &+ \left\{ \kappa^* [\theta^* - V] - \Lambda(x, V, t) \sigma \sqrt{V} \right\} \frac{\partial \Theta}{\partial V} - r \Theta + \frac{\partial \Theta}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

avec :

$$\kappa^* = \kappa + \lambda \quad (2.3.22)$$

$$\theta^* = \frac{\kappa \theta}{\lambda + \lambda} \quad (2.3.23)$$

Ce résultat est très important. En effet, sous la probabilité neutre au risque, le paramètre λ est éliminé. Heston montre que le prix d'une option d'achat Call s'écrit, par analogie avec la formule de Black-Scholes (1973) :

$$C^{hes}(x_t, V_t, t, \tau) = x_t P_1 - x_s e^{-r_t \tau} P_2 \quad (2.3.24)$$

avec :

$$P_j(x, V_t, x_s, \tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \log(x_s)} f_j(x, V_t, \tau, \phi)}{i\phi} \right) d\phi \quad (2.3.25)$$

$$f_j(x, V_t, \tau, \phi) = \exp \{ C(\tau, \phi) + D(\tau, \phi) V_t + i\phi x \} \quad (2.3.26)$$

$$C(\tau, \phi) = r\phi i\tau + \frac{\alpha}{\sigma^2} \left[(b_j - \rho\sigma\phi i + d_j)\tau - 2 \log \left(\frac{1 - g_j e^{d_j\tau}}{1 - g_j} \right) \right] \quad (2.3.27)$$

$$D(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d_j\tau}}{1 - g_j e^{d_j\tau}} \right] \quad (2.3.28)$$

$$g_j = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d} \quad (2.3.29)$$

$$d_j = \sqrt{((\rho\sigma\phi - b_j)^2 - (2u_j\phi i - \phi^2))} \quad (2.3.30)$$

$$x = \log(x_t) \quad (2.3.31)$$

pour $j = 1, 2$ avec, $u_1 = \frac{1}{2}$, $u_2 = -\frac{1}{2}$, $\alpha = \kappa\theta$, $b_1 = k^* - \rho\sigma$, $b_2 = \kappa^*$ ⁵ Les paramètres du vecteur $\theta = (\kappa^*, \theta^*, \rho, V_t, \sigma)'$ sont ensuite estimés à l'aide du programme (2.4.3). Après avoir estimé les paramètres du modèle, la densité neutre au risque s'obtient aisément à partir du calcul numérique de l'équation (2.3.27)

2.4 Application aux options sur indice CAC 40

Dans cette section, une analyse comparative des différentes approches, paramétrique, semi-paramétrique et non-paramétrique, est mise en oeuvre. Notre base de données initiale contient toutes les transactions d'options sur indice CAC 40 (Call et Put) enregistrées sur le MONEP entre le 1^{ère} Janvier 2007 et 31 Décembre 2007. A notre connaissance, c'est la première application d'estimation de la DNR sur le marché Français portant sur les options européennes en utilisant des approches structurelles et non structurelles.

2.4.1 La base de donnée

Notre base de donnée est fournie par SBF-Bourse de Paris qui procure chaque mois un CD-ROM incluant toutes les valeurs *intraday* de l'indice CAC 40 ainsi toutes transactions *intraday* des options sur indice CAC 40. L'étude s'étend sur une période d'une année : du 02/01/2007 au 31/12/2007. Notre choix pour cette période tient au caractère particulièrement non gaussien du marché.

5. Il est important de noter que les interprétations de κ^* and $\sqrt{\theta^*}$ comme la vitesse de retour à la moyenne et la volatilité de long terme sont toujours valides.

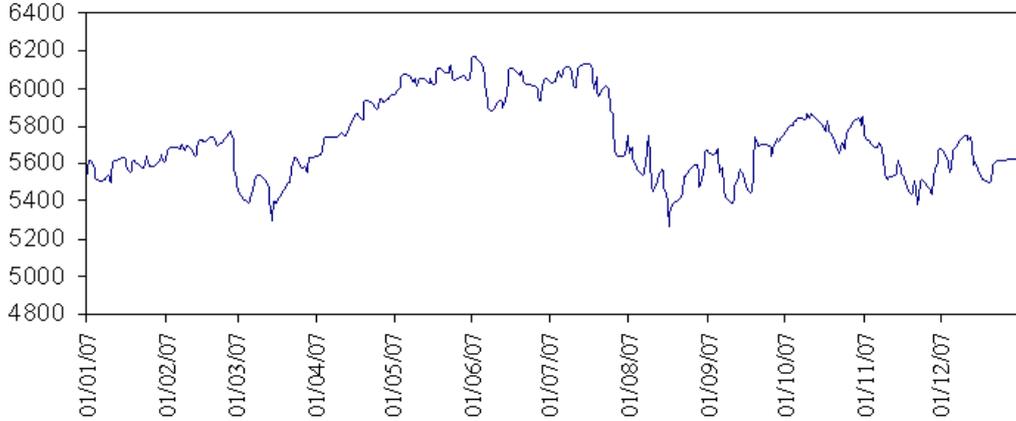


Figure 3.1 – L'évaluation de l'indice CAC 40 pour la période du 01/01/2007 au 31/12/2007

Les options sur indice CAC 40 traitées sur le MONEP sont de type européen (l'option sera exercée que à l'échéance). Elles couvrent huit maturités : les trois premiers mois, puis les trois trimestres (sur la base Mars, Juin, Septembre, Décembre) et enfin deux semestres (Mars et Septembre). Le jour de l'exercice est le dernier jour ouvré de chaque mois. Deux prix d'exercice consécutifs sont séparés par 50 points d'indice. Le marché est ouvert entre 9h et 17h30.

Pour évaluer le prix des options, on doit ajuster l'indice pour tenir compte des dividendes. Aït-Sahlia et Lo (1998) utilisent la relation d'arbitrage entre le prix clôture de l'indice et des prix futurs de CAC 40 pour calculer le taux de dividende implicite $\delta_{t,\tau}$. Selon ces auteurs, l'arbitrage entre le prix clôture et le prix à terme devrait valider cette relation :

$$F_{t,T} = x_t(\exp(r_{t,T} - \delta_{t,T})\tau) \quad (2.4.1)$$

Pour contourner le problème de la non-observabilité du taux de dividende, $\delta_{t,\tau}$, on extrait, à partir des prix à termes $F_{t_{fin},T}$ et les prix de clôture de l'indice CAC 40⁶, le taux de dividende implicite $\delta_{t,\tau}$ pour chaque maturité T à travers la formule

⁶. Les prix de futures $F_{t_{fin},T}$ et les prix de clôture de l'indice CAC 40 sont les prix enregistrés à la fin de la journée

suivante :

$$\delta_{t_{fin},T} = r_{t,T} - \frac{1}{\tau} \log\left(\frac{F_{t_{fin},T}}{x_{t_{fin}}}\right) \quad (2.4.2)$$

où r est le taux sans risque. Après avoir déterminé ce taux de dividendes, il est aisé de calculer la valeur du "future" *intraday* en connaissant la valeur de l'indice CAC40 à ce moment-là.

Plusieurs filtres ont été appliqués aux données afin d'en éliminer les données aberrantes. Ceux-ci sont basés sur les critères de maturité, prix d'exercice, prix et liquidité des options. Pour le critère de maturité, on ne considère pas des options de longues maturités dont l'échéance dépasse trois mois. Aussi, nous excluons les options de maturités inférieures à cinq jours. Pour le critère de prix d'exercice, on tient que les options dont le moneyness-forward (défini par le rapport strike/forward) est dans l'intervalle $[0.85; 1.15]$. En effet, la liquidité des options en dehors de cet intervalle est très faible, et il y a une incertitude dans le calcul de la volatilité implicite. Concernant le critère du prix, on supprime les options dont le prix est inférieur à 0.10 euros. On note, généralement, les options hors-la-monnaie sont plus cotées que celles dans-la-monnaie. Par ailleurs, les options dans la monnaie sont remplacées par leur pendant obtenu par la relation de parité Call-Put. Concrètement, on remplace le prix de chaque option d'achat dans la monnaie par $P(x_t, x_s, \tau, r_{t,T}, \delta_{t,T}) + (F_{t,T} - x_s)e^{-r_{t,T}\tau}$, où $P(x_t, x_s, \tau, r_{t,T}, \delta_{t,T})$ le put en dehors de la monnaie. On obtient ainsi une base constituée uniquement par des Calls, mais où toutes les informations pertinentes sur la volatilité implicite contenues dans les Puts en-dehors de la monnaie sont également présentes.

Le taux d'intérêt choisi est l'euribor 1 mois ou 3 mois selon que la maturité résiduelle de l'option est inférieure ou bien égale à un 1 mois, ou bien est comprise entre deux et trois mois. Les taux d'intérêt utilisés pour évaluer les prix des options de maturités résiduelles comprises entre un mois et deux mois sont déterminés par interpolation cubique spline de Matlab.

On présente sur la Figure 3.2 la surface de la volatilité implicite pour la date 10/01/2007 et sur la Figure 3.3 les smiles de la volatilité implicite pour les trois différentes échéances. La volatilité implicite de Black-Scholes est définie comme la valeur du paramètre volatilité permettant d'égaliser le prix Black-Scholes au prix du marché. On remarque clairement que la représentation graphique des volatilités implicites en fonction des prix d'exercice (Strike) prend approximativement la forme d'une courbe en U qualifiée de smile de volatilité (sourire de volatilité) ou en demi U appelée skew de volatilité. Elle décroît en fonction de prix d'exercice ⁷.

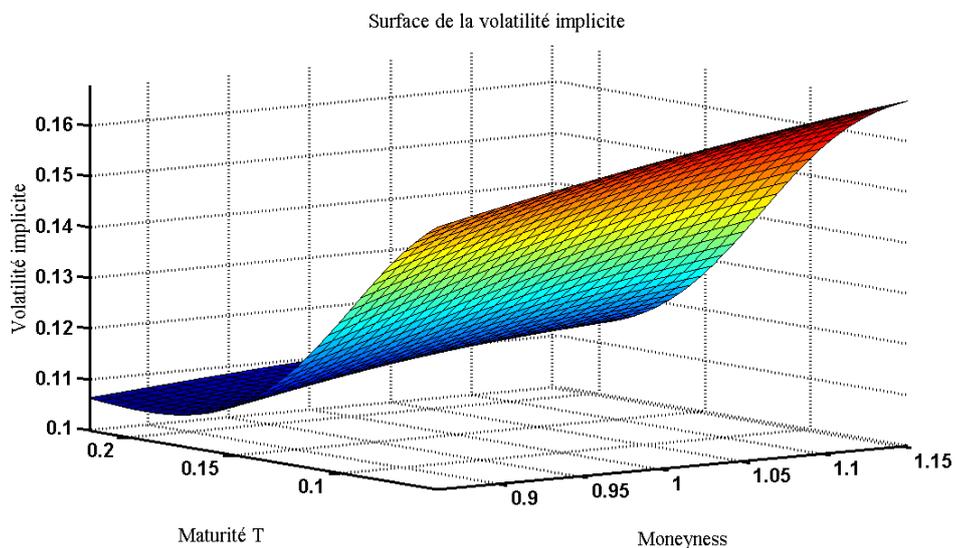


Figure 3.2 – Surface de la Volatilité Implicite observée sur options sur indice le 10/01/2007

7. La formule de Black et Scholes (1973) suppose que le prix de l'actif sous-jacent suit un mouvement brownien géométrique avec une volatilité constante. Par conséquent, toutes les options écrites sur un même sous-jacent devraient avoir une même volatilité.

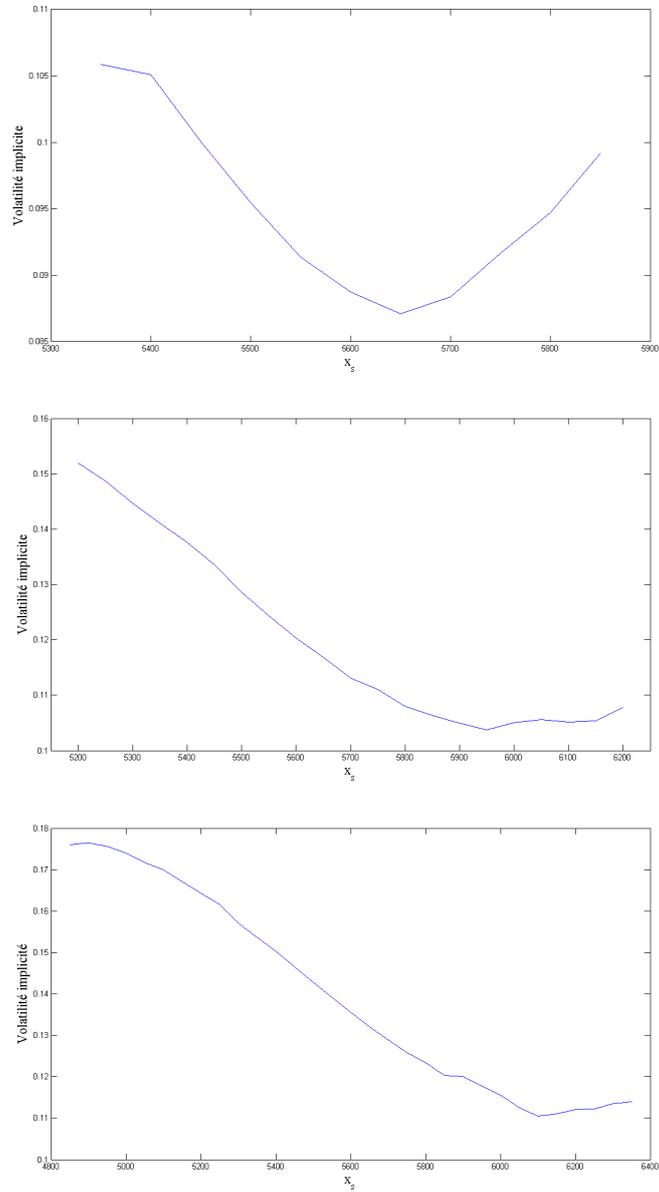


Figure 3.3 – Smile de volatilité sur les option CAC 40 pour la date 10/01/2007 d'échéance respectivement 20 jours, 50 jours et 80 jours.

2.4.2 Méthodologie et procédure d'estimation

En notant $C_{t,\tau,i}$ $i = 1, \dots, N_c^\tau$ et $P_{t,\tau,i}$ $i = 1, \dots, N_p^\tau$, respectivement les prix observés sur le marché d'un *Call* et d'une *Put* d'échéance $(t+\tau)$ et de prix d'exercice x_s . Où N_c^τ le nombre de strike pour un *Call* de maturité $(t+\tau)$ et N_p^τ le nombre de strike pour un *Put* de même maturité. On estime les paramètres du vecteur $\theta \in \Theta$ en procédant par la minimisation simultanée de la somme des carrés des écarts entre le prix théorique et le prix observé correspondant. Formellement θ est solution de :

$$\theta \in \Theta \left\{ \sum_{i=1}^{N_c^\tau} w_i^c (C_{t,\tau,i} - C_t(x_{s,i}, \tau, \theta))^2 + \sum_{i=1}^{N_p^\tau} w_i^p (P_{t,\tau,i} - P_t(x_{s,i}, \tau, \theta))^2 \right\}. \quad (2.4.3)$$

2.4.3 Comparaison des méthodes

2.4.3.1 La méthode de noyau (Kernel)

On s'intéresse dans un premier temps à la méthode de noyau proposée par Aït-Sahlia et Lo (2000). Cette méthode ne nécessite aucune hypothèse ni sur le processus de l'actif sous-jacent ni sur la famille de densité à laquelle elle appartient. L'estimation de la fonction de volatilité donnée par l'équation (2.2.58) nécessite l'utilisation de tous les Calls et les Puts présentés dans notre base de donnée. Aït-Sahlia et Lo (1998) montrent que les choix de la densité de kernel et la bandwidth h pour chaque régresseur doivent vérifier certaines conditions afin d'optimiser les propriétés asymptotiques de la fonction d'évaluation des options, C . Les densités de kernel de la *moneyness* et la maturité sont présentées par :

$$k_{x_s/F} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5 \cdot (x_s/F)^2} \quad (2.4.4)$$

$$k_\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0.5 \cdot (\tau)^2} \quad (2.4.5)$$

où :

$$h_{x_s/F} = c_{x_s/F} \sigma_{x_s/F} n^{-1/(d+2(q_{x_s/F}+m))} \quad (2.4.6)$$

$$h_\tau = c_\tau \sigma_\tau n^{-1/(d+2q_\tau)} \quad (2.4.7)$$

Avec, n la taille de l'échantillon, d le nombre de régresseurs, le paramètre σ_j est l'écart-type inconditionnel du $j^{\text{ème}}$ régresseur, q_j le nombre de dérivées partielles de

$C(\cdot)$ que l'on souhaite calculer par rapport au $j^{\text{ème}}$ régresseur, ($j = x_s/F, \tau$), en fin, le paramètre m est l'ordre du noyau ($m = 2$ pour le noyau gaussien). Et le paramètre c_j est un constant, il dépend de la fonction à estimer et du choix du noyau ; il est de l'ordre de 1. Le tableau 3-1 présente les valeurs de différents paramètres de cette méthode.

Tableau 3-1 – Les valeurs de la bandwidth pour les différents régresseurs

	Kernel	n	q_j	m	d	σ_j	h
x_s/F	Gaussien	25868	2	2	2	0.0724	0.0262
τ	Gaussien	25868	2	0	2	100.5462	18.4886

La Figure 3.4 montre la volatilité implicite construite en utilisant l'estimateur de Nadaraya-Watson pour la date 10/01/2007 pour les maturités 20 jours, 50 jours et 80 jours. Il est clair que cette volatilité présente un smile très important en fonction de moneyness par rapport à celle de Black-Scholes (1973). En outre, on remarque que le smile de la volatilité dépend de la maturité, ces résultats corroborent bien les résultats de Aït-Sahlia et Lo (1998) et Bliss et Panigirtzoglou (2002).

La Figure 3.5 montre la densité neutre au risque avec la méthode de *kernel* pour la date 10/01/2007 d'échéance 80 jours. Cette DNR est obtenue en utilisant l'approximation numérique de la dérivée seconde d'un *Call* par rapport au strike. On voit sur cette Figure les limites de cette méthode. La fonction de lissage donne des densités très imprécises dues au nombre très faible des points observés.

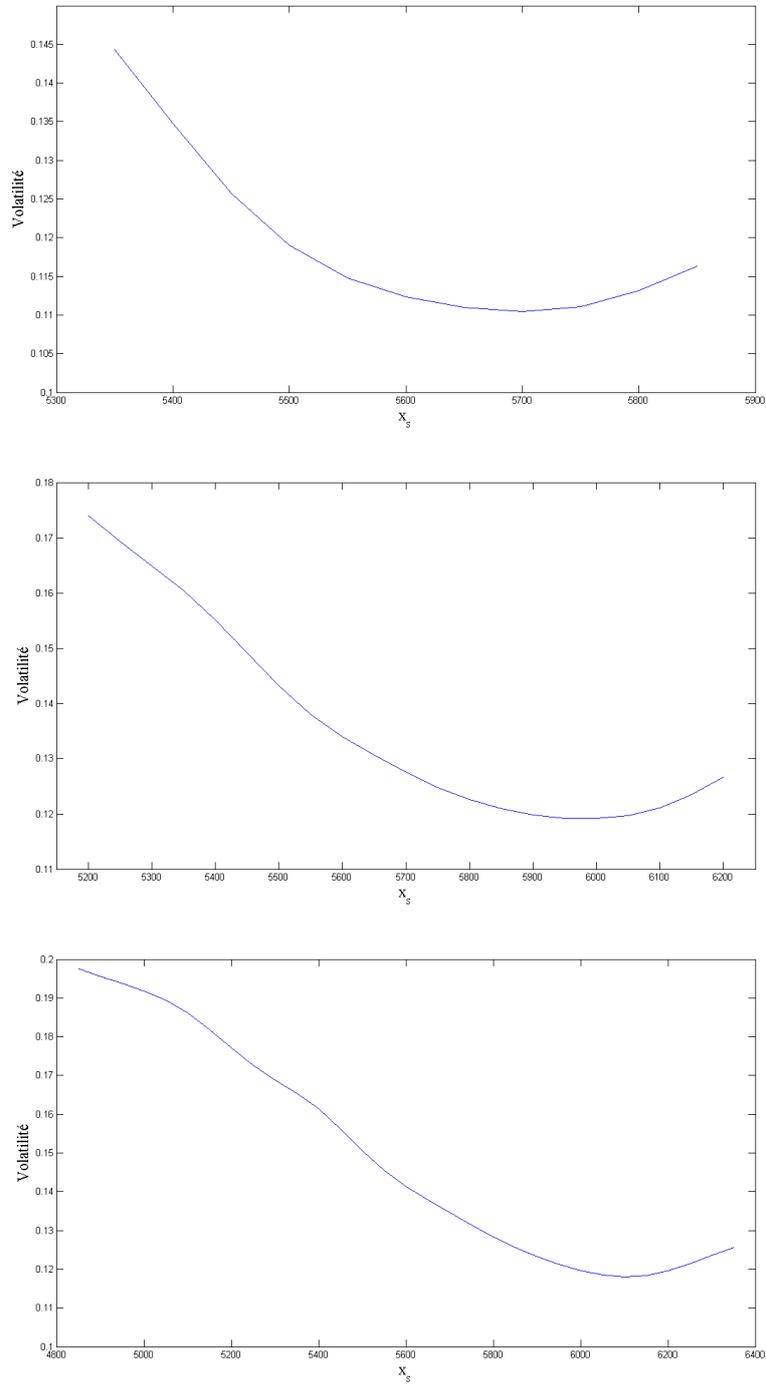


Figure 3.4 – Smile de volatilité sur les option CAC 40 pour la date 10/01/2007 d'échéance respectivement 20 jours, 50 jours et 80 jours selon la méthode de Aït-Sahlia et Lo (2000).

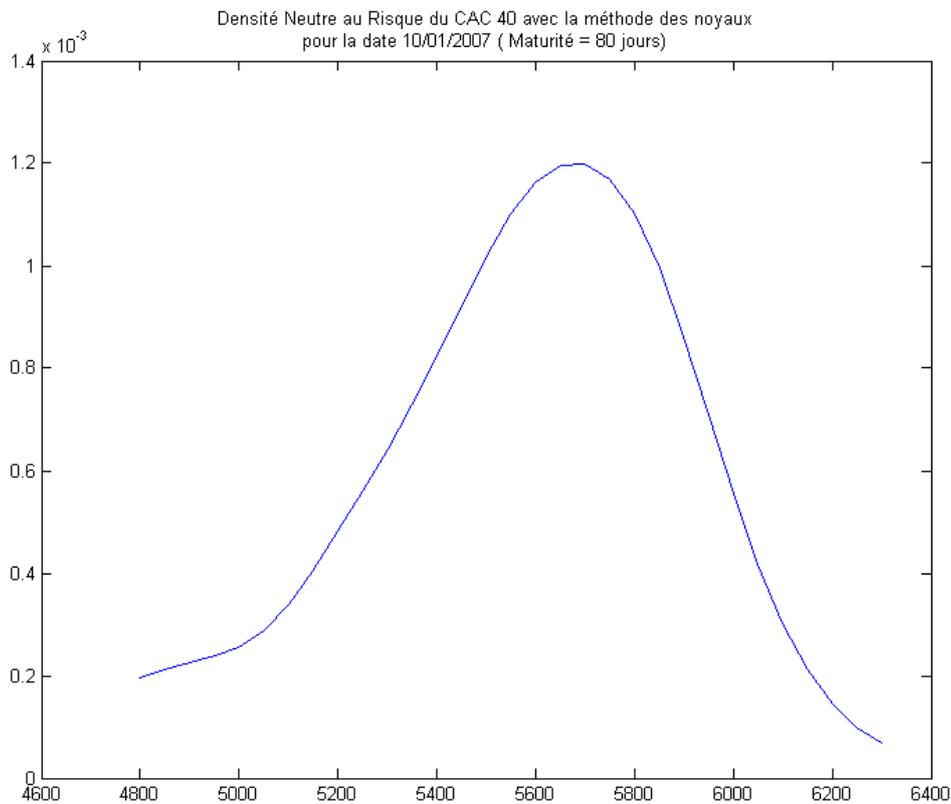
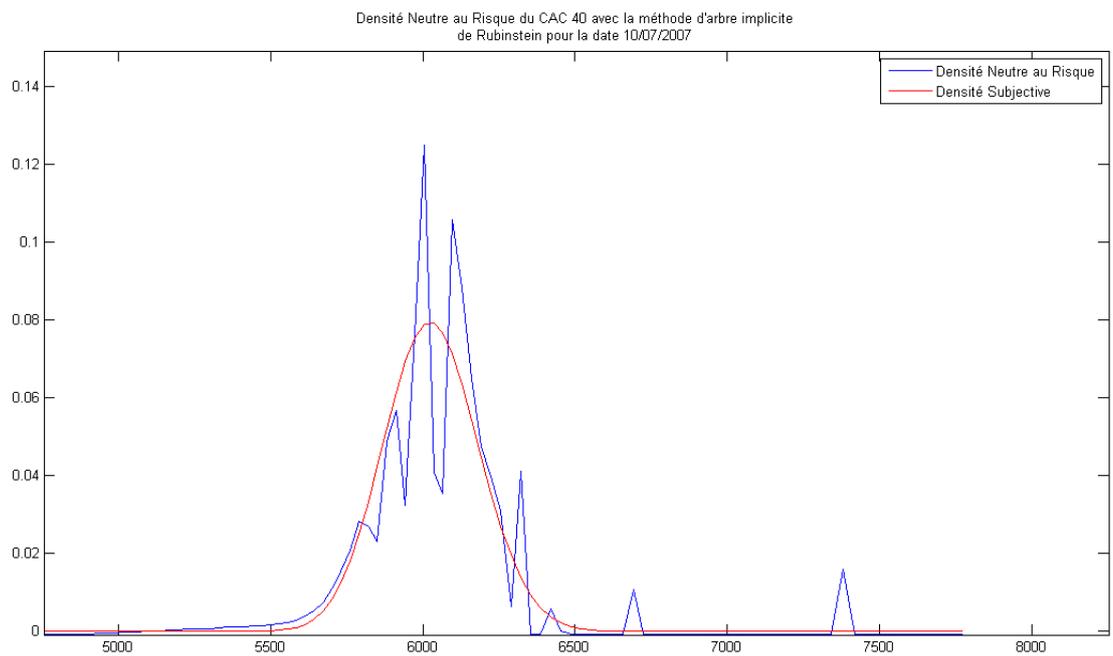
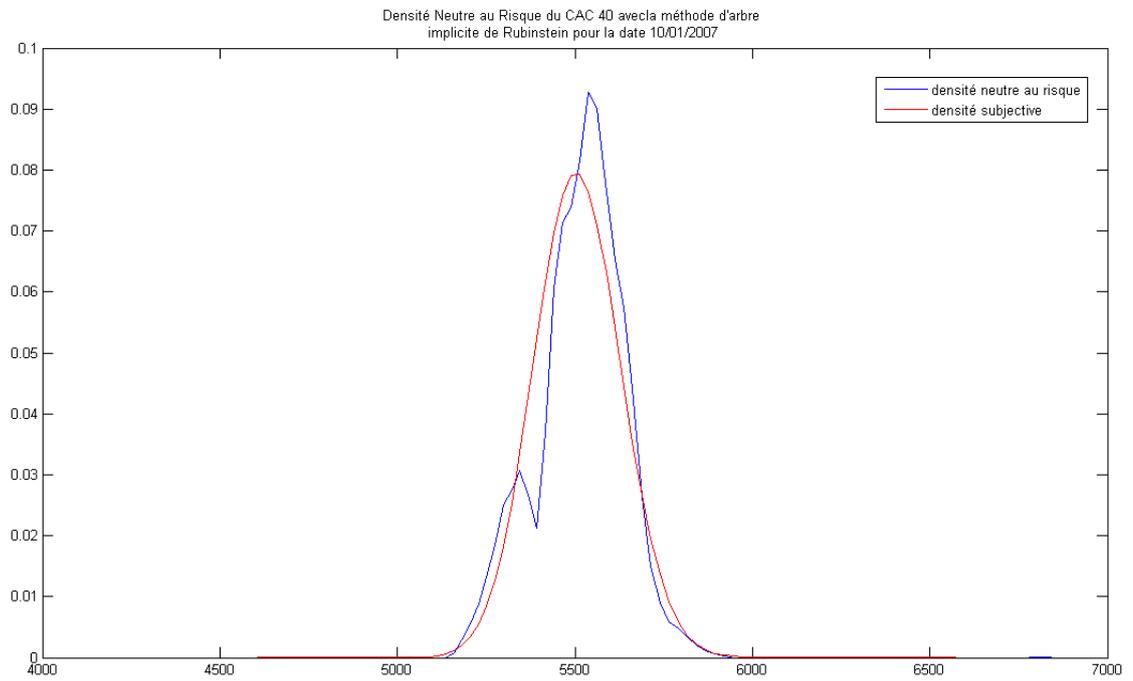


Figure 3.5 – La densité neutre au risque $q(x_T)$ du CAC 40 avec la méthode de kernel pour la date 10/01/2007 d'échéance 3 mois.

2.4.3.2 L'arbre binomial implicite

L'estimation de la densité neutre au risque par la méthode de Jackwerth et Rubinstein (1996) se fait dans un cadre discret. La Figure 3.6 montre les densités de probabilités estimées par cette méthode pour les trois dates suivantes 10/01/2007, 10/07/2007 et 17/10/2007 pour des maturités 20 jours pour les deux premiers et 13 jours pour la troisième. Il apparaît, d'après les expérimentations, qu'il y a des différences significatives entre les densités neutre au risque et les densités subjectives pour les trois dates. La Figure 3.6 montre aussi que les densités neutre au risque estimées par cette méthode ne décrivent pas les phénomènes de Kurtosis, laquelle se caractérise par des queues de distributions épaisses ("fat-tailed distribution").



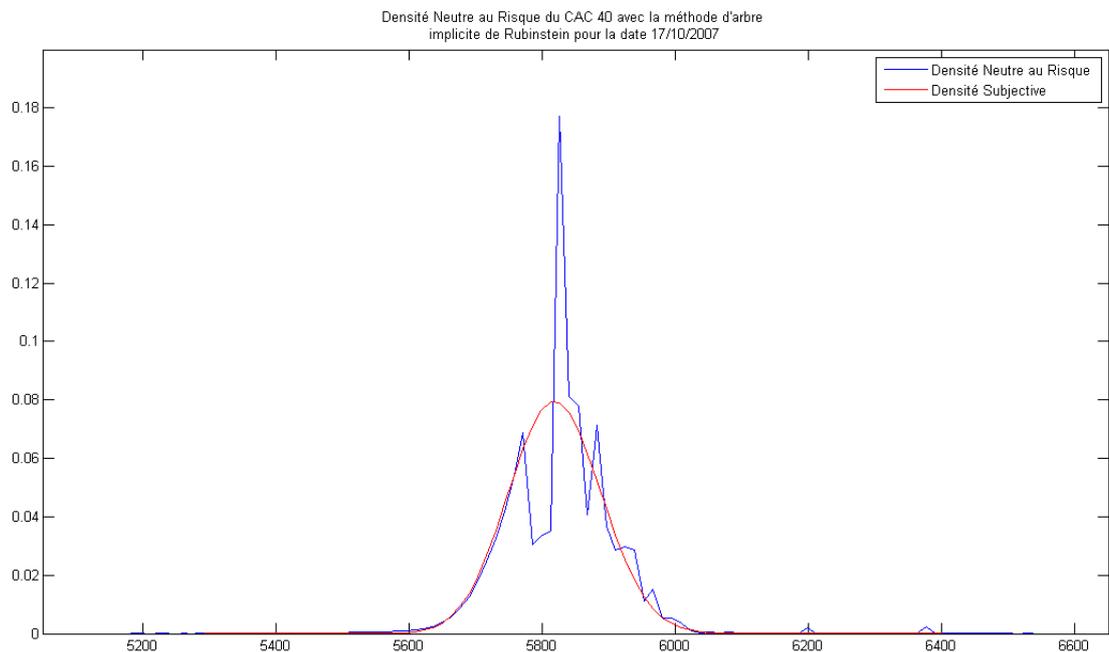


Figure 3.6 – La densité neutre au risque avec l’arbre implicite de Jackwerth et Rubinstein (1996) pour les différentes dates et maturités

2.4.3.3 Comparaison des méthodes paramétriques et semi-paramétriques

Plusieurs papiers comparent la performances de différentes méthodes d’extraction de la densité neutre au risque. Jondeau et Rockinger(2000) comparent le mélange de log-normale, l’approximation d’Edgewerth, le modèle à sauts et le modèle d’Heston à volatilité stochastique en les appliquant aux options de taux de change. Ils montrent que un certain seuil, ces méthodes procurent la même densité neutre au risque. Ils remarquent que, durant la période normale, le modèle de mélange log-normale donne des bonnes résultats que les autres modèles. Cependant, durant la période de crise, le modèle à saut surclasse les autres modèles. Coutant et al (2001) comparent les modèles de mélange de lois log-normale, expansion Gram-Charlier et la méthode fondée sur l’entropie selon les critères de la vitesse de convergence, la robustesse de l’estimation et la facilité d’implémentation. Ils montrent que pour les taux d’intérêt, la méthode fondée sur l’expansion de Gram-Charlier semble procurer les résultats les plus stables. Bliss and Panigrizoglou (2002) comparent la robustesse

du modèle de mélange de log-normales et le modèle à volatilité implicite selon l'approche de Shimko (1993). Ils trouvent que la méthode de lissage de spline procure la meilleure performance que la méthode de mélange de log-normales. Cependant, malgré son importante flexibilité, la méthode de lissage de spline ne couvre pas les queues de distribution de la DNR au delà d'un certain ordre des prix d'exercices.

En plus des approches non-paramétriques d'estimation de la DNR, i.e. la méthode de noyau et la méthode d'arbre binomiale, on va comparer maintenant six méthodes paramétriques et semi-paramétriques fondées sur les options d'indice CAC 40 durant une période normale et une période de crise. La première technique est une approximation numérique de la DNR fondée sur la dérivée seconde des prix des options par rapport au prix d'exercice, comme proposée par Breeden et Litzenberger (1978). La deuxième méthode est obtenue en utilisant un mélange de deux log-normales, suivant Melick et Thomas (1997). La troisième technique est l'expansion d'Edgeworth autour de la distribution log-normale de Jarrow et Rudd (1982). La quatrième méthode est celle de polynômes d'hermite, proposée par Madan et Mline (1994). La cinquième DNR est fondée sur la méthode de volatilité stochastique d'Heston (1993). Enfin, on considère le modèle de diffusion à saut comme proposé par Bates (1991). Les résultats des différents paramètres estimés des modèles d'extraction de la DNR, sont reportés dans les tableaux de 3-2 à 3-7⁸. Les graphiques de différentes DNR extraites sont représentés dans les graphes de 3.7 à 3.11⁹

Le mélange de log-normales, l'expansion d'Edgeworth, les polynômes d'hermite et le modèle à saut s'ajustent au mieux aux données historiques que la méthode de Breeden and Litzenberg. Pour cette raison, les approches non paramétriques comme celle de noyau et la méthode d'arbres, comme décrit ci-dessus, ont été développées. Le mélange de log-normales, l'expansion d'Edgeworth, les polynômes d'hermite, le modèle à saut et celui de Heston ont des queues de distribution plus épaisses que la distribution log-normale.

8. Voir annexe

9. Voir annexe

L'utilisation de plusieurs méthodes d'estimation de la DNR nous amène à s'interroger sur la meilleure méthode à choisir pour extraire la DNR. Pour y répondre, on présente des mesures d'ajustement, permettant de chercher combien les prix théoriques des options calculés selon les différentes approches d'estimation de la DNR, C , s'ajustent au mieux aux prix de marché des options \hat{C} . Des mesures d'erreurs synthétiques ont été calculées en utilisant l'erreur quadratique moyenne (MSE) et l'erreur relative moyenne (ARE).

$$MSE = \frac{10^2}{m-n} \sum_{i=1}^m (C_i - \hat{C}_i)^2 \quad (2.4.8)$$

$$ARE = \frac{10^4}{m-n} \sum_{i=1}^m \left(\frac{C_i - \hat{C}_i}{C_i} \right)^2 \quad (2.4.9)$$

avec m est le nombre de prix observés des options n est le nombre des paramètres des méthodes. La meilleure méthode est celle qui a la plus petite erreur.

Afin de comparer les différents modèles d'extraction de la DNR, non seulement nous vérifions les propriétés statistiques des différentes DNR mais nous calculons aussi le MSE à des dates différentes 01-10-2007, 07-10-2007 (période de crise) et 10-17-2007 et différentes maturités 1, 2 et 3 mois. Tous les résultats sont présentés dans les tableaux de 3-8 à 3-12¹⁰.

Tout d'abord, on compare les volatilités, les skewness et les kurtosis obtenus pour différentes DNR.

Concernant les volatilités 3-8, la volatilité introduite par le modèle de Black-Scholes est moins élevée que celle obtenue par les autres méthodes, et ceci est vrai pour toutes les périodes et toutes les maturités,¹¹ Ce qui explique le biais impliqué par l'hypothèse de log-normalité.

En ce qui concerne le skewness implicite 3-9 et le kurtosis implicite 3-10, le modèle log-normal est moins intéressant puisqu'il ne tient pas compte de l'asymétrie

10. Voir les annexes.

11. Sauf pour le 10-17-2007 pour des maturités moins d'un mois, le modèle à saut a la volatilité la plus petite.

ou des queues épaisses. On remarque un skewness fortement négative et un excess de kurtosis très élevé pour toutes les méthodes sauf pour celle de Black et Scholes. Les skewness obtenus par les méthodes semi-paramétriques (modèles de polynôme d'hermite et l'expansion d'Edgeworth) sont moins élevés que ceux d'autres méthodes dans la période normale (01-10-2007). Bien qu'en période de crise (07-07-2007), le polynôme d'hermite et le mélange de log-normales ont les skewness les moins élevés, en période d'après-crise, le modèle à saut a le skewness le moins élevé pour la maturité de deux mois, suivi par le modèle de polynômes d'hermite. les graphiques de la DNR corroborent ces résultats.

Le tableau 3-11 présente l'erreur quadratique moyenne (MSE) des différentes méthodes. Selon ce critère, le modèle à saut dans la période pré-crise fournit une meilleure estimation de la densité que les autres modèles sur, et ce pour des échéances relativement courtes. Toutefois, pendant cette même période, le modèle de mélange de log-normales semble être plus performant pour les options à échéance supérieure à 3 mois. Nous remarquons qu'en période de crise (07-10-2007), le modèle d'expansion d'Edgeworth procure le meilleur ajustement pour toutes les maturités. Concernant la période après-crise, le modèle de diffusion à sauts s'ajuste mieux pour une maturité de deux mois alors que le modèle d'expansion d'Edgeworth s'ajuste mieux pour une maturité de trois mois.

Les résultats de l'erreur relative moyenne (ARE) sont présentés dans le tableau 3-12. Comme pour le MSE, le modèle à saut surclasse les autres modèles dans la période pré-crise. Dans la période de crise, les modèles de polynôme d'hermite et le mélange des log-normales possèdent l'erreur la moins élevée. La différence de leurs ARE est faible. Concernant la période après-crise, les modèles semi-paramétriques présentent le meilleur ajustement pour les maturités d'un et trois mois, alors que le modèle de mélange de log-normales présente le meilleur ajustement sur la période de pré-crise.

Les fonctions de DNR sont d'une importance capitale en finance. Une fois estimées, il est possible d'en extraire des multiples d'information. Par exemple, nous

pouvons effectuer des tests et calculer les intervalles de confiance autour de la valeur future attendue dont l'évolution offre la possibilité aux investisseurs de mesurer la façon dont les marchés sont censés évoluer avec le temps. En outre, les DNR peuvent fournir une mesure des variations extrêmes dans les prix des actifs sous-jacents, qui est s'avère un outil important pour la gestion des risques. De plus, l'existence d'une DNR éventuellement variable dans le temps, et qui diffèrent de distributions de probabilité réelle permet de déterminer la prime de risque et d'extraire l'information concernant l'aversion au risque des investisseurs.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons comparé et implémenté huit méthodes différentes d'estimation de la densité neutre au risque fondées sur les options sur le marché français des produits dérivés. Les approches structurelles et non structurelles sont utilisées pour estimer la densité de probabilité risque neutre à partir des données des options sur indice CAC 40 de haute fréquence au cours d'une période normale et la période de crise 2007. Notamment, nous avons implémenté le modèle de Black & Scholes, mélange de log-normales, le modèle d'expansions d'Edgeworth, les polynômes d'hermite, le modèle d'arbre, la régression du noyau, le modèle de volatilité stochastique de Heston et le modèle de diffusion avec sauts. Afin de comparer les divers modèles d'estimation de la densité, nous avons non seulement vérifié les propriétés statistiques des différentes densités, mais aussi nous avons calculé des mesures appropriées d'ajustement. Nous avons constaté que le mélange de log-normales, l'expansion Edgeworth, les polynômes d'hermite, le modèle à saut et le modèle d'Heston s'ajustent le mieux avec les données historiques et ont des queues plus épaisses que la distribution log-normale. En outre, selon les différents critères d'ajustement, le modèle de diffusion fournit une estimation meilleure de la densité que les autres modèles sur la période pré-crise, et ce pour des échéances relativement courtes. Toutefois, pendant cette même période, le modèle de mélange de log-normales semble être plus performant pour les options à échéance plus de 3 mois. De plus, dans la période de crise et post-crise, nous constatons que les modèles semi-paramétriques sont les méthodes qui offrent un meilleur ajustement pour toutes les échéances avec

une différence minime avec le modèle de mélange de log-normales.

Bibliographie

- [1] **Abadir K. & Rockinger M. (1997)**, *Density-Embedding Functions*, HEC Working Paper.
- [0] [2] **Abken P., Madan D. B. & Ramamurtie R. (1996)**, *Estimation of Risk Neutral and Statistical Densities by hermite Polynomial Approximation : With an Application to Eurodollar Futures Options*, Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper 96-5.
- [3] **Aït-Sahalia Y. & Lo A. W. (1998)**, *Non-parametric estimation o state-price densities implied in financial asset prices*, Journal of Finance, vol. 53, pp. 499-517, April.
- [4] **Aït-Sahalia Y. & Lo A. W. (2000)**, *Non-parametric Risk Management and Implied Risk Aversion*, The Journal of Econometrics, 94, 9-51.
- [5] **Anagnar I., Mascia B., Stewart D. H. & Tompkins T. (2002)**, *The relation between implied and realised probabilty density functions*, Working Paper University of Technology Vienna.
- [6] **Azzalini A. & Bowman A. W. (1997)**, *Iapplied Smoothing Techniques for Data Analysis*, London :Oxford University Press.
- [7] **Bahra B. (1996)**, *Probability distributions of future asset prices implied by option prices*, Bank of England Quarterly Bulletein : August 1996, 299-311.
- [8] **Bates D. S. (1976)**, *The Crash of '87' : Was It Expected ? The Evidence from Option Markets*, Journal of Finance, Vol. 46, pp 1009-1044, July.

- [9] **Black F. (1976)**, *The Pricing of Commodity Contracts*, Journal of Financial Economics, Vo. 3, pp 167-179.
- [10] **Black F. & Scholes M. (1973)**, *The pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, Vol. 81, pp. 637-659, May-June.
- [11] **Bliss R. & Panigirtzoglou N. (2002)**, *Testing the Stability of Implied Probability Density Functions*, Journal of Banking and Finance, 26, pp. 381-422, March.
- [12] **Bliss R. & Panigirtzoglou N. (2004)**, *Option-implied Risk Aversion Estimates*, Journal of Finance, Vol. 59, No. 1, pp. 407-446.
- [13] **Boes M. J., Drost F. C. & Bas J. M. W. (2005)**, *Nonparametric Risk-Neutral Return and Volatility Distributions*, Tilbury University, Working Paper.
- [14] **Breeden D. T. & Litzenberger R. H. (1978)**, *Prices of state-contingent claims implicit in option prices*, Journal of Business, Vol. 51, pp. 621-651, October.
- [15] **Campa J. M., Chang P. H. K. & Reider R. L. (1998)**, *Implied Exchange Rate Distributions : Evidence from OTC Options Markets*, Journal of International Money and Finance, Vol. 17, No. 1, pp. 117-160.
- [16] **Coutant S. (1999)**, *Implied risk aversion in option prices using hermite polynomials*, in *Estimating and interpreting probability density function*, Bank for International Settlements.
- [17] **Coutant S., Rockinger M. & Jondeau E. (2001)**, *Reading PIBOR Futures Options Smile : The 1997 Snap Election*, Journal of Banking and Finance, Vol. 25, No. 11, pp. 1957-1987.
- [18] **Coutant S. (2001)**, *Contenu en information dans le prix d'options : estimation de la densité neutre au risque du sous-jacent et applications*, Thèse, Université Paris Dauphine.
- [19] **Cox J. C. & Ross S. A. (1976)**, *The valuation of option for alternative stochastic processus*, Journal of Financial Economics, Volume. 3, Issues 1-2, January-March 1976, pp. 145-166 .
- [20] **Enzo G., Handel M. & Härdle W. K. (2006)**, *Time Dependent Relative Risk Aversion*, SFB 649 Discussion Papers SFB649DP2006-020, Sonderforschungsbereich 649, Humboldt University, Berlin, Germany.

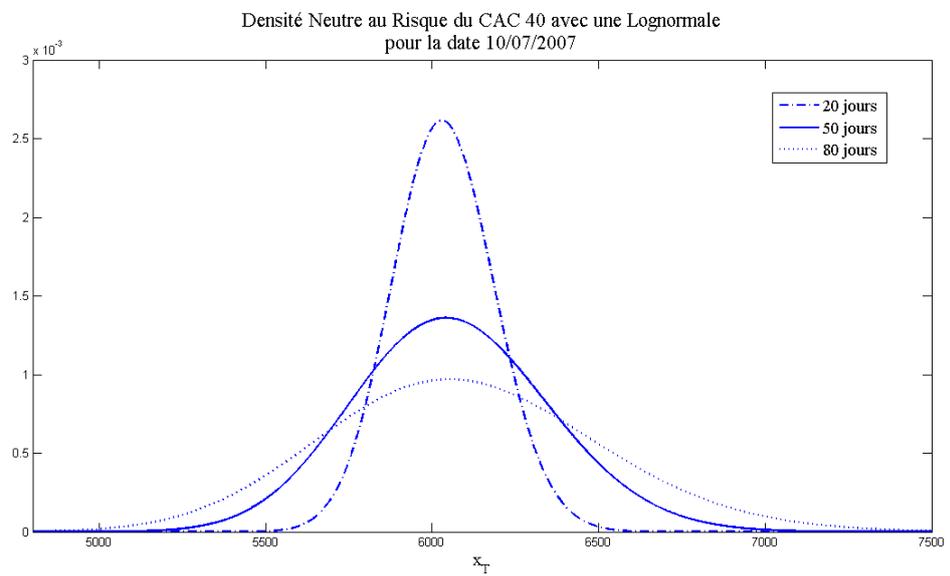
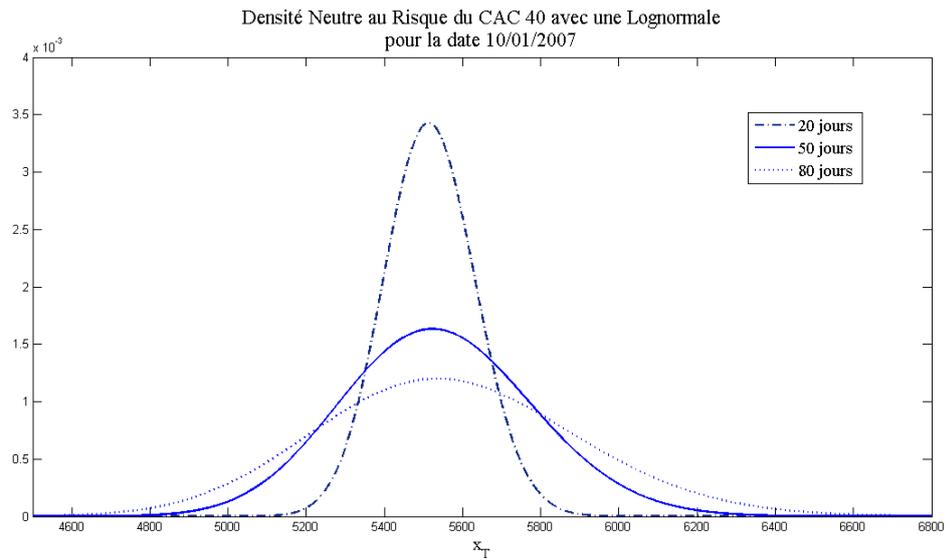
- [21] **Heston, S.L. (1993)**, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Review of Financial Studies, Vol. 6, pp. 327-343.
- [22] **Jackworth J. C. & Rubinstein M. (1996)**, *Recovering Probability Distributions from option Prices*, Journal of Finance, Vol. 51, pp. 1611-1631.
- [23] **Jackworth J. C. (2000)**, *Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns*, The Review of Financial Studies, Vol. 13, pp. 433-451.
- [24] **Jarrow R. & Rudd A. (1982)**, *Approximate valuation for arbitrary stochastic processes*, Journal of Financial Economics, Vol. 10, pp. 349-369.
- [25] **Jondeau E. & Rockinger M. (1997)**, *Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis*, Mathematical Finance, 4, 223-245.
- [26] **Jondeau E. & Rockinger M. (2000)**, *Reading the smile : the message conveyed by methods which infer risk neutral densities*, Journal of International Money and Finance, Vol. 19, pp. 885-915.
- [27] **Jondeau E., Ser-Huang P. & Rockinger M. (2007)**, *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*, book, Library of Congress Control Number : 2006923899.
- [28] **Jondeau E. & Rockinger M. (2000)**, *Gram-Charlier densities*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 25, pp. 1457-1483.
- [29] **Madan D. B. & Milne F. (1994)**, *Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis*, Mathematical Finance, Vol. 4, N. pp. 223-245.
- [30] **Madan, D.B & Milne. F (2002)**, *Extracting Information from Option Markets : Smiles, State-Price Densities and Risk-Aversion*, European Financial Management, Vol. 8, N. 4, pp. 495-513.
- [31] **Malz A. M. (1997)**, *Estimating the probability distribution of the future exchange rate from options prices*, Journal of Derivatives, pp. 18-36.
- [32] **Melik W. R. & Thomas C. P. (1997)**, *Recovering an asset's implied PDF from options prices : an applications to crude oil during the Gulf crisis*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 32, pp. 91-116.

- [33] **Panigirtzoglou N. & Skiadapoulos G. (2004)**, *A new approach to modeling the dynamics of implied distribution : Theory and Evidence from the S&P 500 Options*, *Journal of Banking and Finance*, Vol. 28, pp. 1499-1520.
- [34] **Rubinstein M. (1994)**, *Implied binomial trees*, *Journal of Finance*, *Journal of Finance*", Vol. 49, pp. 771-818.
- [35] **Sherrick B. J., Garcia P. & Tirupattur V. (1996)**, *Recovering probabilistic information from option markets : tests of distributional assumptions*, *Journal of Futures Markets*, Vol. 16, pp. 545-560.
- [36] **Shimko D. C. (1993)**, *Bounds of probability*, *Risk*, Vol. 6, pp. 33-37.
- [37] **Silverman B. W. (1986)**, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, *Monographs on Statistics and Applied Probability*, London : Chapman and Hall.

Appendices

B.1 Les Figures

B.1.1 Le modèle de Black et Scholes (1973)



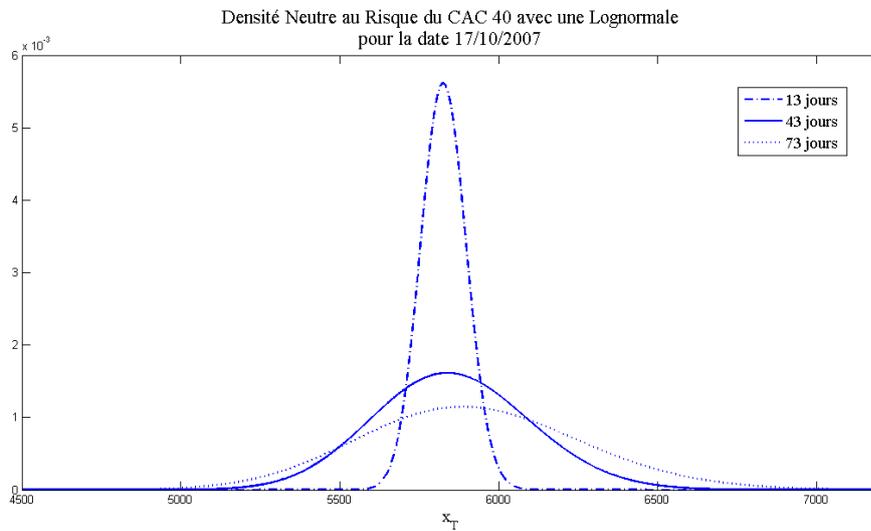
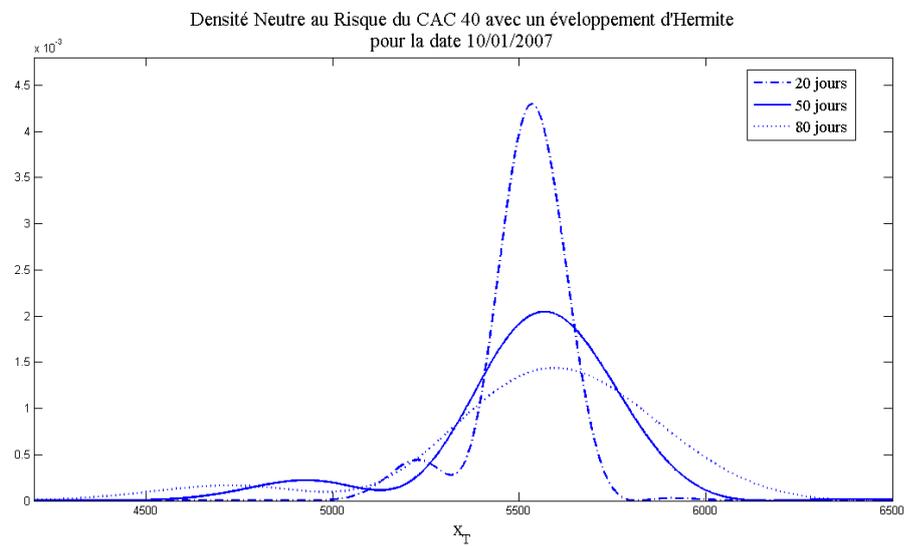


Figure 3.7 – Les densités neutre au risque avec le modèle de Black & Scholes pour les différentes dates et maturités

B.1.2 Le modèle de polynôme de hermite



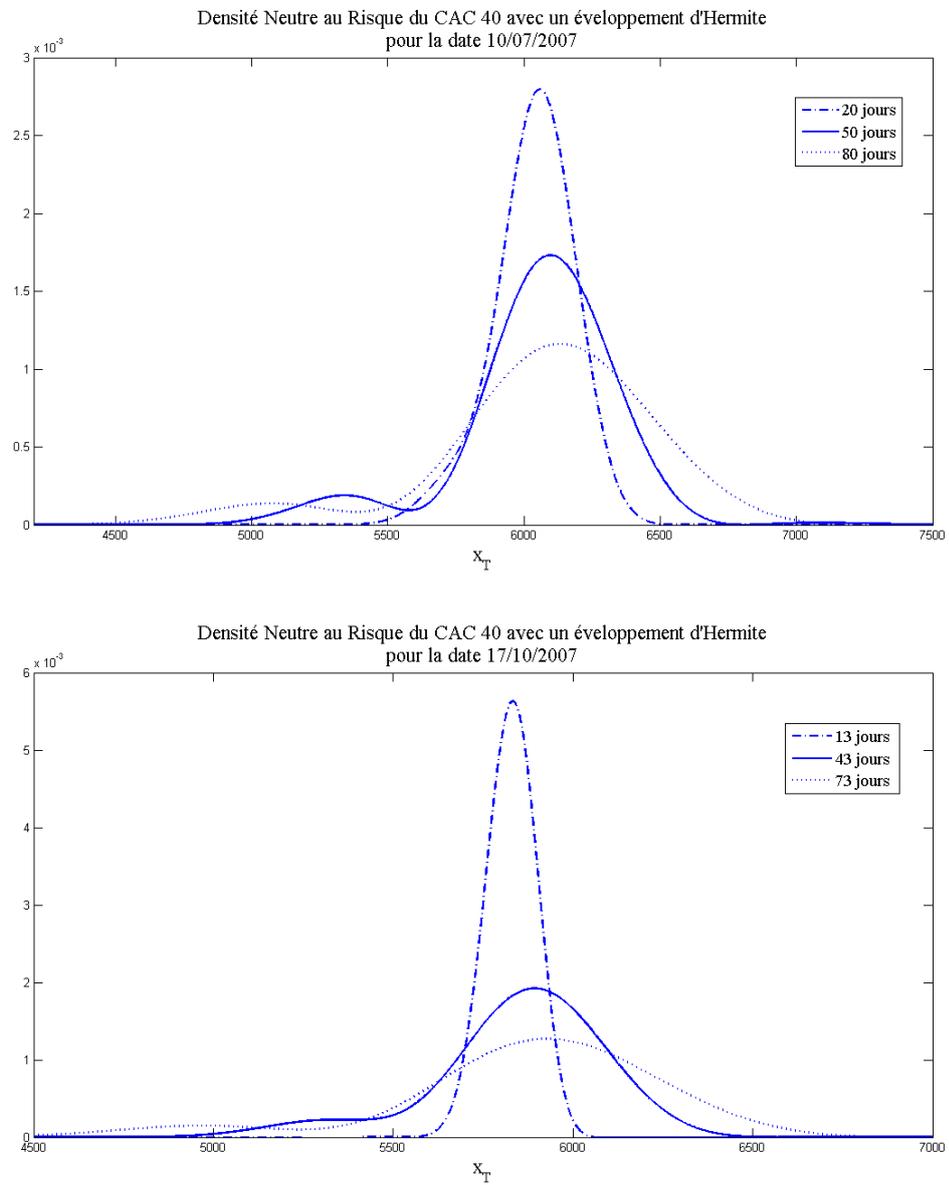
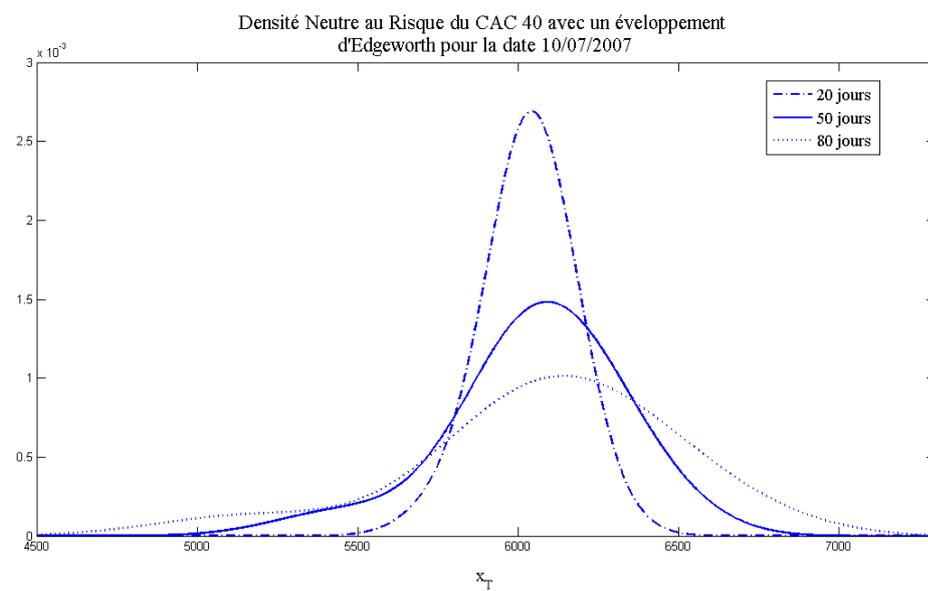
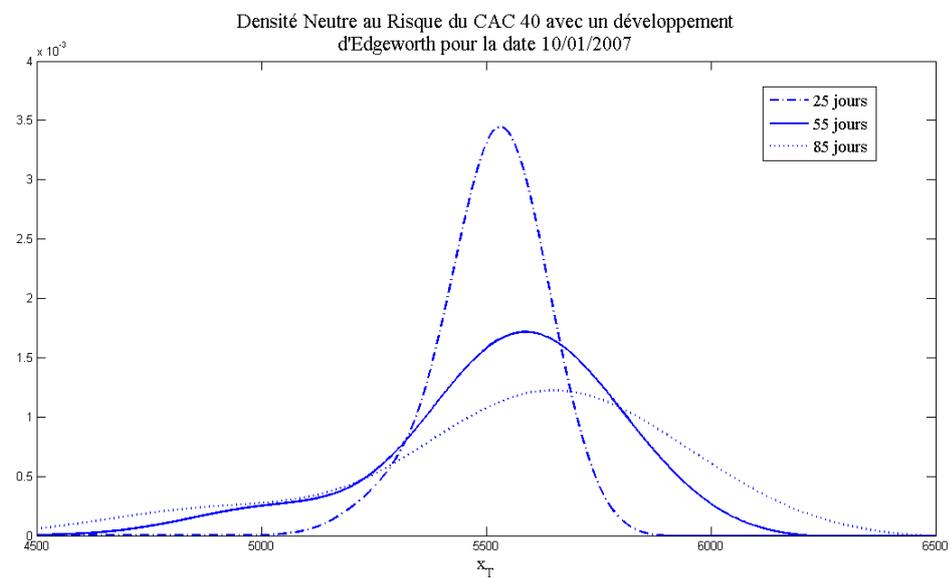


Figure 3.8 – Les densités neutre au risque avec le modèle d’Hermite pour les différentes dates et maturités

B.1.3 Le modèle d'expansion d'Edgeworth



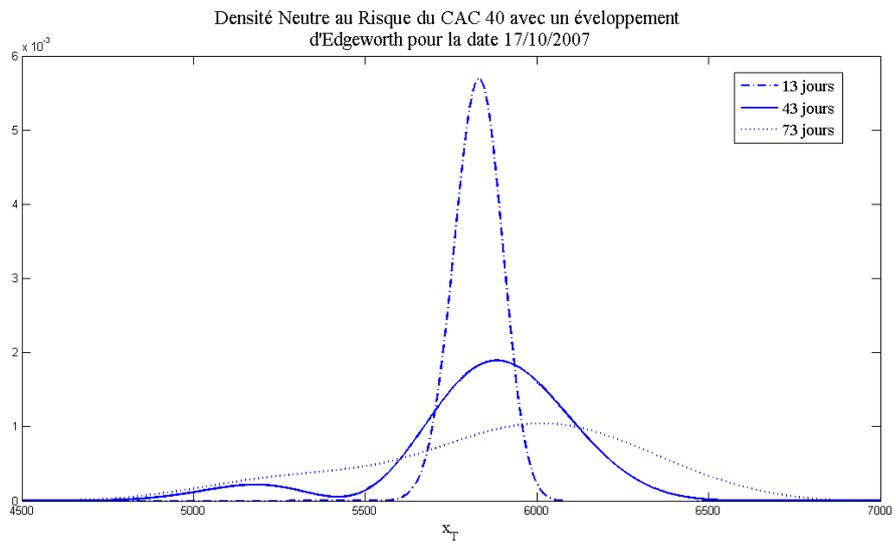
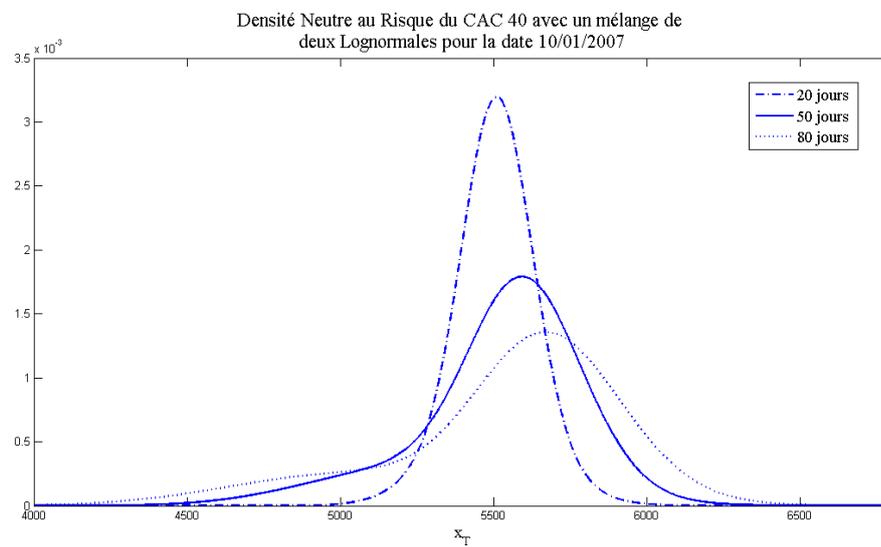


Figure 3.9 – Les densités neutre au risque avec le modèle d’expansion d’Edgeworth pour les différentes dates et maturités

B.1.4 Le modèle de mélange de lois log-normales



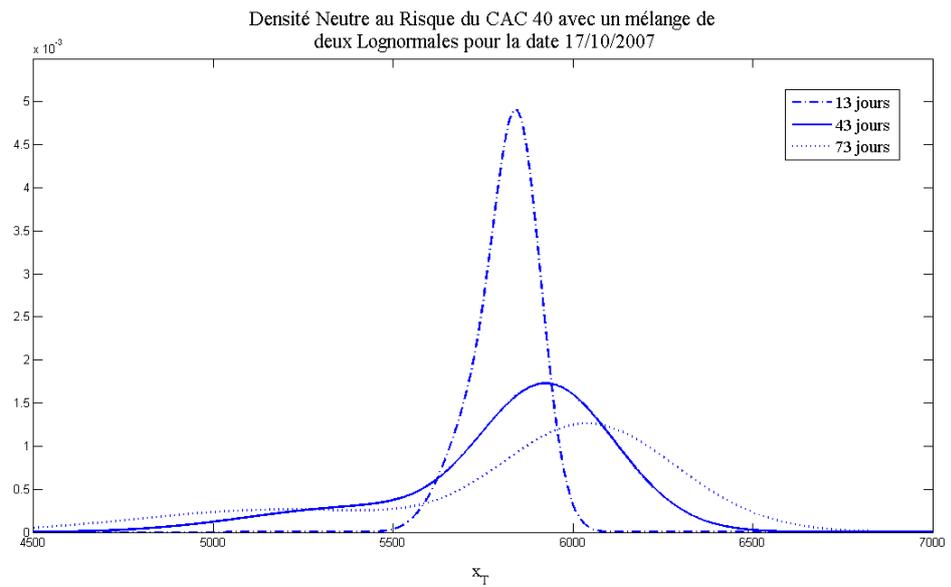
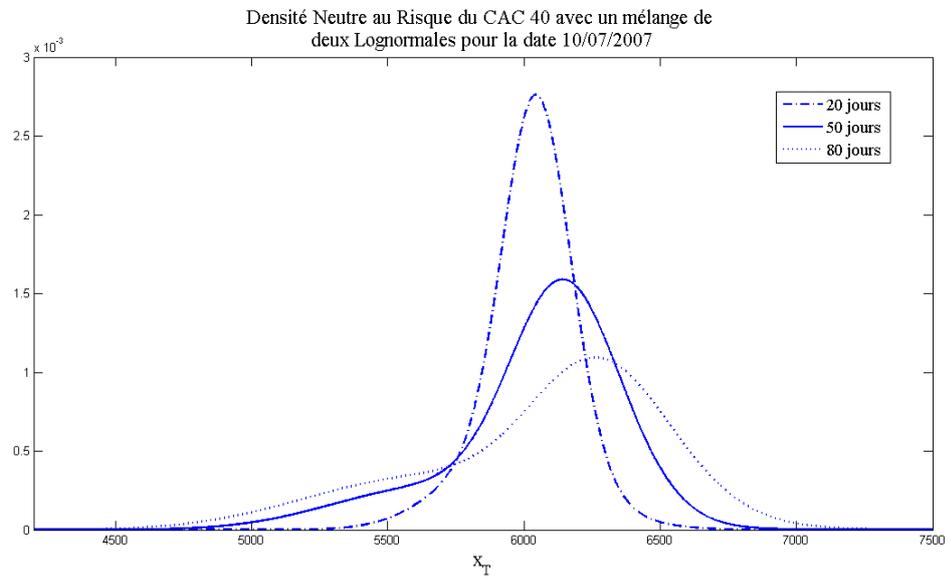
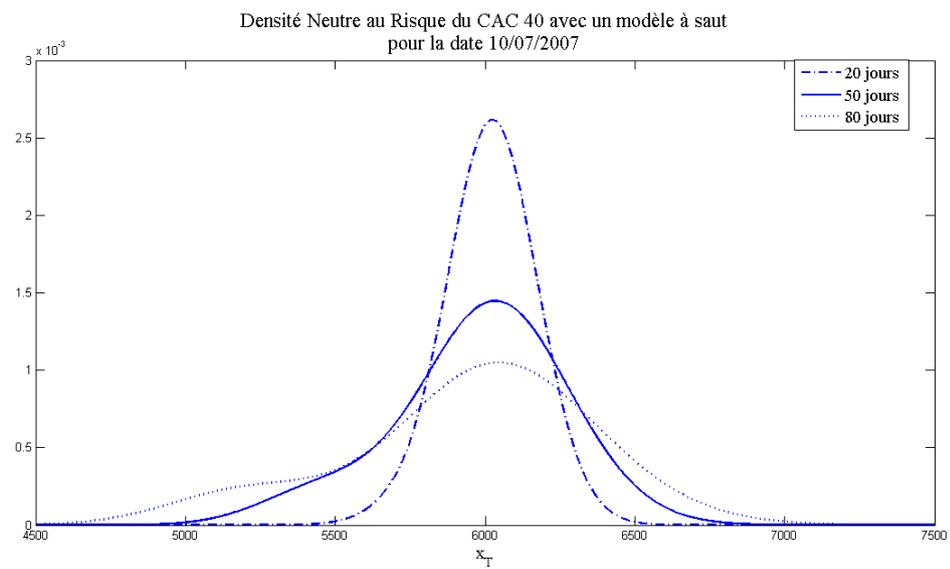
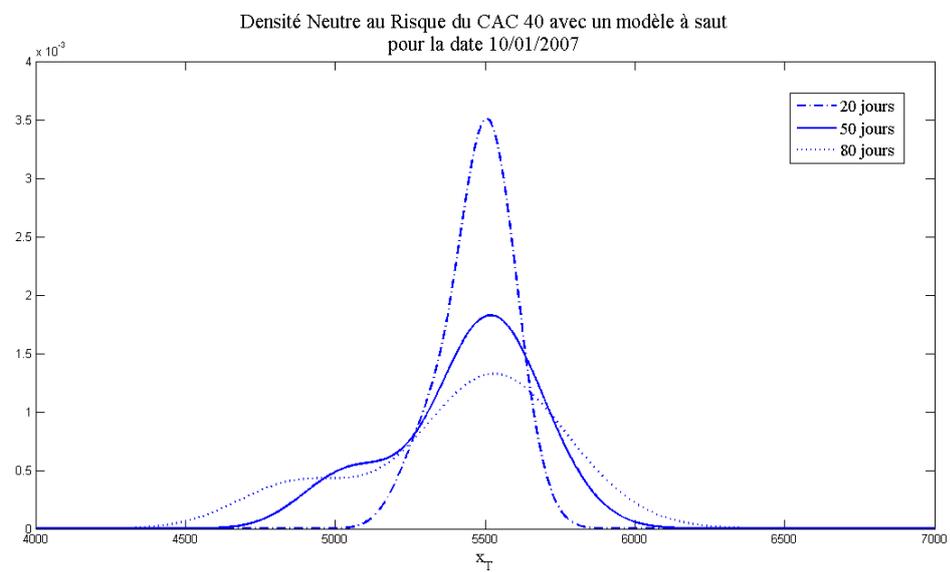


Figure 3.10 – Les densités neutre au risque avec le modèle de mélange de lois log-normales pour les différentes dates et maturités

B.1.5 Le modèle à sauts



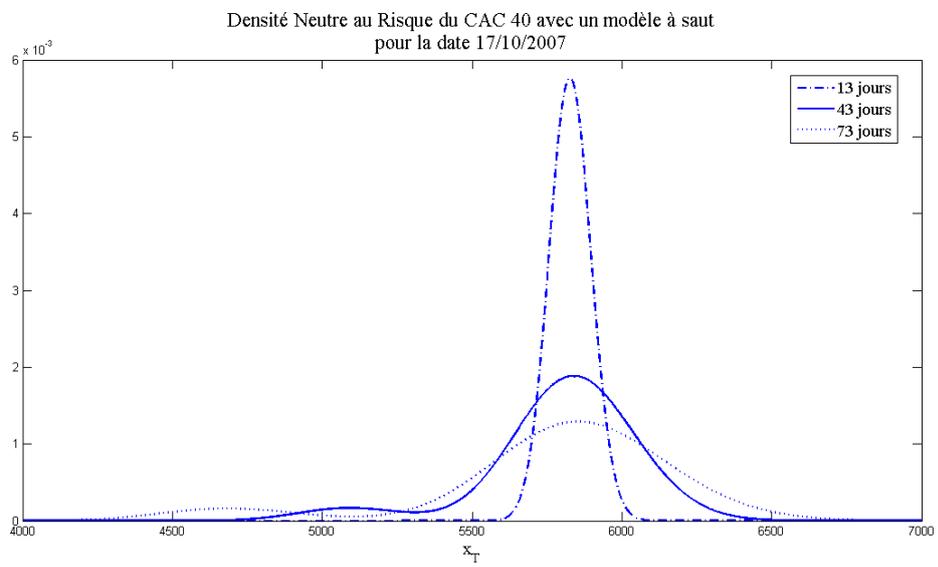


Figure 3.11 – Les densités neutre au risque avec le modèle à sauts pour les différentes dates et maturités

B.2 Les Tableaux

Tableau 3-2 – Paramètres du modèle de Black-Scholes estimés sur CAC 40

<i>Dates</i>	τ	m	s
01-10-2007	20	8.6153	0.0211
	50	8.6185	0.0442
	80	8.6224	0.0600
07-10-2007	20	8.7050	0.0253
	50	8.7086	0.0485
	80	8.7127	0.0678
10-17-2007	13	8.6701	0.0122
	43	8.6739	0.0423
	73	8.6839	0.0590

Tableau 3-3 – Paramètres du modèle de mélange de lois log-normales estimés sur CAC 40

<i>Dates</i>	τ	m_1	m_2	s_1	s_2	α
01-10-2007	20	8.6092	8.6152	0.0332	0.0200	0.2876
	50	8.5705	8.6319	0.0671	0.0325	0.2713
	80	8.5361	8.6465	0.0835	0.0406	0.2729
07-10-2007	20	8.6928	8.7079	0.0407	0.0202	0.2894
	50	8.6496	8.7257	0.0681	0.0328	0.2672
	80	8.6487	8.7478	0.0835	0.0405	0.4042
10-17-2007	13	8.6541	8.6741	0.0154	0.0111	0.3019
	43	8.6043	8.6892	0.0623	0.0311	0.2515
	73	8.5620	8.7089	0.0796	0.0393	0.2729

Tableau 3-4 – Paramètres du modèle des polynômes de Hermite estimés sur CAC 40

<i>Dates</i>	τ	σ	b_3	b_4
01-10-2007	20	0.0967	-0.4280	0.4845
	50	0.1298	-0.4302	0.5250
	80	0.1435	-0.4283	0.4960
07-10-2007	20	0.1113	-0.2324	0.1289
	50	0.1405	-0.4295	0.5314
	80	0.1612	-0.4320	0.4823
10-17-2007	13	0.0635	-0.0699	-0.0284
	43	0.1284	-0.3848	0.3246
	73	0.1582	-0.4263	0.4633

Tableau 3-5 – Paramètres du modèle d'Edgeworth estimés sur CAC 40

<i>Dates</i>	τ	σ	γ_1	γ_2
01-10-2007	20	0.0960	-0.4480	0.5247
	50	0.1288	-0.8317	0.3271
	80	0.1413	-0.7991	0.0590
07-10-2007	20	0.1092	-0.1656	0.2550
	50	0.1344	-0.5386	0.5747
	80	0.1572	-0.6779	0.395
10-17-2007	13	0.0634	-0.1087	-0.0683
	43	0.1389	-1.0724	1.9653
	73	0.1505	-0.6665	-0.9913

Tableau 3-6 – Paramètres du modèle à sauts estimés sur CAC 40

<i>Dates</i>	τ	σ	λ	κ
01-10-2007	20	0.0738	3.3166	-0.0366
	50	0.0858	1.4745	-0.0845
	80	0.0918	0.9700	-0.1168
07-10-2007	20	0.1032	1.0401	-0.0424
	50	0.1069	1.0299	-0.0921
	80	0.1125	0.7551	-0.1350
10-17-2007	13	0.0629	0.1108	-0.0010
	43	0.0979	0.6082	-0.1283
	73	0.1073	0.4525	-0.1999

Tableau 3-7 – Paramètres du modèle d'Heston estimés sur CAC 40

<i>Dates</i>	τ	κ^*	θ^*	σ	ρ	V_t
01-10-2007	20	45.4325	0.0296	0.1481	-0.9738	0.0003
	50	9.9352	0.0308	0.4431	-0.7180	0.0000
	80	23.4851	0.0220	0.5867	-0.8887	0.0000
07-10-2007	20	7.1459	0.0713	0.2017	-0.6110	0.0021
	50	5.4654	0.0628	0.5107	-0.6415	0.0000
	80	11.1566	0.0434	0.7884	-0.7215	0.003
10-17-2007	13	44.5449	0.0113	0.0938	-0.9564	0.0001
	43	53.8001	0.0191	1.0621	-0.4742	0.0029
	73	21.5488	0.0382	2.1490	-0.4972	0.0000

Tableau 3-8 – L'écart-type implicite

<i>Dates</i>	τ	<i>B&S</i>	<i>Hermite</i>	<i>Edgeworth</i>	<i>ML</i>	<i>Saut</i>
01-10-2007	20	116.41	124.31	123.41	135.689	123.32
	50	244.92	263.06	261.03	281.65	262.55
	80	334.18	367.03	361.39	394.91	367.84
07-10-2007	20	152.70	156.50	153.54	171.0177	157.42
	50	294.1744	311.35	297.82	329.78	309.93
	80	413.62	450.76	439.54	460.74	447.08
10-17-2007	13	71.086	72.46	69.51	90.05	69.16
	43	247.71	255.24	276.14	312.04	277.18
	73	349.42	408.43	388.44	470.10	444.30

Notant τ est la maturité, *B&S* est le modèle de Black & Scholes, *Hermite* est le modèle d'Hermite, *Edgeworth* est le modèle d'Edgeworth, *ML* est le modèle de mélange de lois log-normales, *Saut* est le modèle à Sauts.

Tableau 3-9 – Skewness implicites

<i>Dates</i>	τ	<i>B&S</i>	<i>Hermite</i>	<i>Edgeworth</i>	<i>ML</i>	<i>Saut</i>
01-10-2007	20	0.0633	-1.05	-0.44	-0.069	-0.367
	50	0.1328	-1.049	-0.83	-0.8106	-0.57
	80	0.1804	-10.49	-0.79	-0.9106	-0.57
07-10-2007	20	0.0759	-0.57	-0.16	-0.3668	-0.13
	50	0.1457	-1.52	-0.54	-0.9157	-0.4
	80	0.2039	-1.58	-0.68	-0.66	-0.45
10-17-2007	13	0.0366	-0.172	-0.11	-0.5126	0.0356
	43	0.127	-0.94	-0.07	-0.98	-1.05
	73	0.177	-1.04	-0.66	-0.9653	-1.18

Notant τ est la maturité, *B&S* est le modèle de Black & Scholes, *Hermite* est le modèle d'Hermite, *Edgeworth* est le modèle d'Edgeworth, *ML* est le modèle de mélange de lois log-normales, *Saut* est le modèle à Sauts.

Tableau 3-10 – Kurtosis implicites

<i>Dates</i>	τ	<i>B&S</i>	<i>Hermite</i>	<i>Edgeworth</i>	<i>ML</i>	<i>Sauts</i>
01-10-2007	20	3.007	5.37	3.52	3.8104	3.056
	50	3.0313	5.57	3.32	4.298	3.22
	80	3.05	5.42	3.06	3.9052	3.16
07-10-2007	20	3.01	3.63	3.25	4.4932	3.21
	50	3.037	5.6	3.57	4.2168	3.24
	80	3.07	5.36	3.39	3.239	3.07
10-17-2007	13	3.0024	2.86	2.97	3.3044	3
	43	3.0287	4.59	3.32	4.1335	4.93
	73	3.056	5.26	3.46	3.5049	4.77

Notant τ est la maturité, *B&S* est le modèle de Black & Scholes, *Hermite* est le modèle d'Hermite, *Edgeworth* est le modèle d'Edgeworth, *ML* est le modèle de mélange de lois log-normales, *Saut* est le modèle à Sauts.

Tableau 3-11 – MSE

<i>Dates</i>	τ	<i>B&S</i>	<i>Hermite</i>	<i>Edgeworth</i>	<i>ML</i>	<i>Sauts</i>	<i>Heston</i>
01-10-2007	20	167.902	44.33	47.1335	1419.4	17.32	2664.2
	50	2392.39	1196.2	190.317	190.65	131.2532	1342.9
	80	4866.7	1143.8	445.97	352.0697	463.5055	1018.1
07-10-2007	20	123.1794	62.724	40.252	203.95	85.52	2854.2
	50	1694.4	691.8055	77.47	2898.4	121.99	4641.8
	80	3888.4	1953.01	205.27	276.66	327.52	5561.3
10-17-2007	13	44.48	69.0462	70.5022	259.2161	64.2039	5362
	43	1869.8	1133	564.69	478.0566	273.79	2629.4
	73	852.52	8199.8	151.83	2236.9	777.85	7400

Notant τ est la maturité, *B&S* est le modèle de Black & Scholes, *Hermite* est le modèle d'Hermite, *Edgeworth* est le modèle d'Edgeworth, *ML* est le modèle de mélange de lois log-normales, *Saut* est le modèle à Sauts.

Tableau 3-12 – ARE (10^4)

<i>Dates</i>	τ	<i>B&S</i>	<i>Hermite</i>	<i>Edgeworth</i>	<i>ML</i>	<i>Saut</i>	<i>Heston</i>
01-10-2007	20	0.1781	0.8607	5.5447	0.2046	7.12	54.61
	50	0.0452	0.0356	0.1832	0.0116	0.000138	3.09
	80	0.0408	0.0406	1.9181	0.0013	0.000615	1.61
07-10-2007	20	0.0358	0.0194	10.67	0.0227	0.1544	44.07
	50	0.0017	0.001	4.9 10^{-5}	0.0043	$1.3 \cdot 10^{-4}$	73.1375
	80	$8.6 \cdot 10^{-4}$	$8.4 \cdot 10^{-4}$	2.2 10^{-5}	$5.2 \cdot 10^{-4}$	$2.5 \cdot 10^{-5}$	67.02
10-17-2007	13	781.1711	31.286	46.385	2416.6	3317.2	75.52
	43	0.0259	0.0122	0.0219	0.0014	0.0091	162.4
	73	$2.05 \cdot 10^{-4}$	0.0012	4.52 10^{-5}	$3.37 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	62.31

Notant τ est la maturité, *B&S* est le modèle de Black & Scholes, *Hermite* est le modèle d’Hermite, *Edgeworth* est le modèle d’Edgeworth, *ML* est le modèle de mélange de lois log-normales, *Saut* est le modèle à Sauts.

L'ESTIMATION DE LA FONCTION D'AVERSION AU RISQUE

But du chapitre

L'objectif principal de ce chapitre est l'estimation du degrés d'aversion au risque des agents (qui n'est pas observé directement sur le marché) en utilisant la relation théorique fondamentale entre la densité neutre au risque, la densité subjective et la fonction de l'aversion au risque. Nous estimons la densité neutre au risque à partir des prix d'options sur l'indice CAC 40, par le mélange de lois log-normales proposée par Bahra (1996) et le modèle à saut présentées au chapitre précédent, qui néglige toute notion du risque sur le marché mais nous informe, néanmoins, sur les comportements futurs de l'actif sous-jacent et la densité subjective estimée, par la méthode développée par Jackworth (2000), à partir d'une série temporelle de l'actif sous-jacent CAC 40 qui prend en compte la mesure du risque.

3.1 Introduction

Les années quatre-vingts ont marqué le début des recherches académiques quant à l'application de la connaissance des degrés d'aversion au risque aux domaines de la gestion de risque et de la finance quantitative. Parmi ces recherches, citons celle Friend et Blume (1975) tentent d'identifier la nature de la fonction d'utilité des ménages à partir d'une analyse de la composition du patrimoine de 2100 d'entre eux. Leurs résultats les amènent à considérer que l'hypothèse d'une constance de l'aversion au risque relatif constitue une approximation acceptable de la réalité. De même, Szpina (1986) vérifie que l'hypothèse de l'aversion au risque relatif constant est vraie, il trouve que le coefficient d'aversion au risque se situe entre environ 1.2 et 1.8. Dans le même contexte, Nakamura (2007), teste la stabilité du coefficient d'aversion au risque pour les données journalières japonaise entre 1973 et 1991, il montre que ce dernier est invariant. Par ailleurs, Nishiyama (2007) étudie l'effet d'un changement du coefficient de l'aversion au risque des banques américaines au banques japonaises. Il constate que l'augmentation de l'aversion au risque des banques américaines est sans ambiguïté associée à la crise asiatique, tandis que l'augmentation de l'aversion au risque des banques japonaises n'est que faiblement associé. Tarashev et al. (2003) calculent le coefficient de l'aversion au risque en utilisant les options sur indices S&P 500, FTSE 100 et DAX 30. Ils constatent que ce coefficient a fortement augmenté dans la seconde moitié de 1997 (la période de la crise asiatique) et pendant l'automne de 1998. Alonso et al (1990) évaluent le coefficient d'aversion relative au risque pour le marché boursier espagnol entre 1965 et 1984. Quant à Rosenberger et Engle (1997) et Aït-Sahalia et Lo (2000) utilisent la relation entre les densités neutre au risque et subjective et l'aversion au risque pour dériver les fonction d'utilité marginale. Coustant (1999) et Enzo, Handel et Härdle (2006) montrent que la fonction d'aversion au risque varie au cours du temps. Jackworth (1996, 2000) calcule la fonction d'aversion au risque avant et après la crise de 1987. Il montre que cette fonction est positive et décroissante durant la crise et négative et croissante après la crise.

Notons d'autres recherches récentes, entre autres celle de Villa et Pérignon (2002). Ces auteurs appliquent la même technique que Aït-Sahalia et Lo (2000) pour

estimer la fonction d'aversion au risque en utilisant les options sur indice CAC 40. Ils définissent une nouvelle formule de la fonction d'aversion au risque qui porte le nom de "mesure d'aversion au risque relatif géométrique". Scheicher (2003), quant à lui détermine cinq facteurs influençant la fonction d'aversion au risque pour expliquer les variations journalières de l'aversion au risque sur le marché boursier Allemand. Et enfin, l'étude de Bliss et Panigirtzoglou (2004) qui porte sur l'estimation de la fonction d'aversion au risque pour des différentes maturités. Ils utilisent deux fonctions d'utilités : exponentielle et puissance et les options sur indice S&P et indice FTSE 100 pour extraire leurs résultats.

Ce chapitre est organisé comme suit : la deuxième section définit la fonction de l'aversion au risque implicite et elle illustre la relation entre l'aversion au risque et les densités de probabilités risque neutre et subjective (appelé également statistique). Nous estimons la densité subjective en utilisant la méthode développée par Jackworth (2000) dans la troisième section. La quatrième section présente les deux méthodes pour estimer la densité neutre au risque : la mélange de lognormales et le modèle à saut. L'estimation numérique de la fonction d'aversion au risque fera l'objet d'une cinquième section. La dernière section conclut le chapitre.

3.2 La fonction d'aversion au risque implicite

La fonction d'aversion au risque permet de comprendre les comportements de l'agent vis-à-vis de risque. Et nous permet d'identifier la forme de la fonction d'utilité. La littérature suggère deux mesures de l'aversion au risque : l'aversion au risque absolue, noté A_a , qui est définie par la présence de risques exogènes, et l'aversion au risque relatif, noté (A_r), défini par la présence de risques endogènes (ou proportionnelles). Pratt (1964) et Arrow (1971) définissent ces deux mesures d'aversion au risque comme suit :

$$A_a = -U''(W) / U'(W) \quad (3.2.1)$$

$$A_r = -WU''(W) / U'(W) = A_a W \quad (3.2.2)$$

où U est la fonction d'utilité et W la richesse de l'agent. Arrow (1971) suppose que

les investisseurs disposent d'une fonction d'aversion au risque absolue *DARA* qui est décroissante par rapport à la richesse et une fonction d'aversion au risque relatif *IRRA* qui est croissante par rapport à la richesse de l'agent. Il est aisé de montrer la dépendance entre l' A_a , A_r et W .

$$A_r = A_a W \quad (3.2.3)$$

$$\frac{dA_r}{dW} = A_a + \frac{dA_a}{dW} \quad (3.2.4)$$

Par conséquent, si dA_a/dW est négative (*DARA*), dA_r/dW peut être positive, négative ou nul puisque A_a et W sont positifs. Par ailleurs, les fonctions d'utilités se caractérisent par des fonctions d'aversion au risque absolues (*ARA*) et relatives (*RRA*) croissantes, décroissantes ou constantes. A titre d'exemple, la fonction d'utilité logarithmique est *DARA* et *CRRA*, la fonction d'utilité puissance *DARA* et *CRRA* et la fonction d'utilité exponentielle négative *CARA* et *IRRA*. Afin de tester les différentes hypothèses concernant le signe de $\frac{dA_a}{dW}$ et $\frac{dA_r}{dW}$, les fonctions d'aversion au risque doivent être estimés empiriquement. Cependant, les études empiriques ont montré qu'il est impossible d'étudier, empiriquement, l'évolution de A_r et A_a par rapport à W . Pour cette raison il faut analyser le comportement de l'individu à différents points où il y a un changements de la richesse. Jackwerth (2000) et Aït-Sahalia et Lo (2000) suggèrent qu'il est possible d'extraire l'aversion au risque dans les prix d'option observés en rapprochant la densité neutre au risque et la densité subjective. Plus précieusement, ils déterminent une relation entre la densité neutre au risque, la densité subjective et l'aversion au risque.

On suppose que l'économie est composée d'un seul bien de consommation sans revenu externe, un actif risqué, un actif sans risque et un taux sans risque constant. Dans un telle économie, les marchés financiers sont supposés dynamiquement complet. L'agent économique consomme uniquement à la date finale et maximiser son utilité espérée de la richesse finale en choisissant le montant α_s investi dans l'actif risqué à temps intermédiaire. La fonction d'utilité est deux fois derivable, croissante et concave.

$$\max_{\alpha_s | t \leq s \leq T} E [U (W_T)]$$

sous la contrainte :

$$\begin{cases} dW_s = \{ rW_s + \alpha_s(\mu - r) \} ds + \alpha_s \sigma dZ_s \\ W_s \geq 0 \\ t \leq s \leq T \end{cases}$$

avec W_s denote la richesse à l'instant s , r le taux sans risque, μ le rendement instantané par unité de temps, σ la volatilité instantané par unité de temps. Soit J la fonction d'utilité indirecte, la conduction du premier ordre est :

$$\frac{\partial J(W_s, x_s, s)}{\partial W} = e^{-r(s-t)} \frac{\partial J(W_t, x_t, t)}{\partial W} \xi_s$$

ξ_s est la dérivée de Radon-Nykodim ,

$$\xi_s = \exp \left\{ - \int_t^s \theta dZ_u - \frac{1}{2} \int_t^s \theta^2 du \right\}$$

et θ est la prime du risque,

$$\theta = \frac{\mu - r}{\sigma}.$$

La densité neutre au risque, $q_t(x_t)$, est définie comme $q_t(x_t) = \xi_t p_t(x_t)$, où $p_t(x_t)$ est la densité subjective. Si on suppose que $s = T$, on obtient la condition finale suivante :

$$U'(x_T) = e^{-r(T-t)} U'(x_t) \xi_T. \quad (3.2.5)$$

$$\xi_T = e^{r(T-t)} \frac{U'(x_T)}{U'(x_t)} \quad (3.2.6)$$

En prenant la dérivée de ξ_T , donné par (3.2.5), par rapport à x_T , on obtient :

$$\xi'_T = e^{r(T-t)} \frac{U''(x_T)}{U''(x_t)}. \quad (3.2.7)$$

Notant que le rapport de (3.2.5) et (3.2.7) fournit l'aversion au risque relatif de Arrow-Pratt, $A_{rt}(x_T)$

$$\frac{\xi'_T}{\xi_T} = \frac{U''(x_T)}{U'(x_T)} x_T. \quad (3.2.8)$$

En injectant

$$\xi_T = \frac{q_t(x_T)}{p_t(x_T)} \quad (3.2.9)$$

et

$$\xi'_T = \frac{q'_t(x_T) p_t(x_T) - q_t(x_T) p'_t(x_T)}{p_t^2(x_T)}$$

dans l'équation (3.2.8), on obtient une expression analytique de l'aversion au risque.¹ Jackwerth (2000) montre que la fonction d'aversion au risque absolue implicite² peut être extraite à partir de la densité neutre au risque et la densité subjective implicites de la manière suivante³ :

$$A_{at}(x_T) = \frac{p'_t(x_T)}{p_t(x_T)} - \frac{q'_t(x_T)}{q_t(x_T)}. \quad (3.2.11)$$

où $p(\cdot)$ la densité subjective et $q(\cdot)$ la densité neutre au risque.

On remarque, d'après l'équation (3.2.11), qu'il existe une relation théorique entre la densité neutre au risque, la densité subjective et la fonction d'aversion au risque. On estime la densité neutre au risque à partir des prix d'options sur indice qui élimine de toute notion du risque sur le marché mais qui nous informe sur les comportements future de l'actif sous-jacent et la densité subjective estimée à partir d'une série temporelle de l'actif sous-jacent qui prend en compte la mesure du risque.

3.3 La fonction d'aversion au risque dans le cadre du modèle de Black-Scholes (1973)

Soient C^{BS} le prix d'une option d'achat *Call* dans le cadre du modèle de Black-Scholes (1973) défini par l'équation (2.2.10) et la densité neutre au risque q^{BS} définie

1. voir Aït-Sahalia et Lo (2000)

2. On parle souvent aussi de *tolérance au risque* qui égale, par définition, égale à l'inverse de l'aversion absolue au risque : $T = \frac{1}{A_{rt}} = -\frac{U'(x_T)}{U''(x_T)}$.

3. A partir de l'équation (3.2.8), Villa et Pérignon (2002) définissent une autre formule pour la fonction d'aversion au risque *la mesure d'aversion au risque relatif géométrique* comme suit :

$$\begin{aligned} A_{rt}(x_T) &= p'_t(x_T) \frac{(x_T)}{p_t(x_T)} - q'_t(x_T) \frac{(x_T)}{q_t(x_T)}. \\ &= \frac{p'_t(x_T)}{tg(\beta)} - \frac{q'_t(x_T)}{tg(\alpha)} \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

avec α est l'angle formé par l'axe des abscisses et la droite passant par l'origine et le point de coordonnées $(x_T; q(x_T))$ et β est l'angle formé par l'axe des abscisses et la droite passant par l'origine et le point de coordonnées $(x_T; p(x_T))$.

par l'équation (2.2.14). Sous les hypothèses du modèle de Black-Scholes (1973), la densité subjective est une densité log-normale de moyenne $m = (\log(x_t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\tau)$ et de variance $s^2 = \sigma^2\tau$.

$$p^{BS}(x_T) = \frac{1}{x_T \sqrt{2\pi\sigma^2\tau}} \exp \left[-\frac{[\log(x_T) - m]^2}{2s^2} \right]. \quad (3.3.12)$$

En injectant les équations (3.3.12) et (2.2.14) dans (3.2.9), on obtient :

$$\xi_{t,T}^{BS}(x_T) = \left(\frac{x_T}{x_t} \right)^{-\frac{\mu-r}{\sigma^2}} \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} (\mu - r) (\mu + r - \sigma^2) \tau \right\} \quad (3.3.13)$$

Le seul terme non constant dans cette expression est $\left(\frac{x_T}{x_t} \right)$. Le paramètre $\xi_{t,T}$ est défini aussi comme le rapport des fonctions de l'utilité marginale (3.2.6). Si l'on considère les constantes suivantes :

$$\gamma = \frac{\mu - r}{\sigma^2}$$

$$\lambda = \exp \left\{ \frac{1}{2\sigma^2} (\mu - r) (\mu + r - \sigma^2) \tau \right\}$$

On peut réécrire l'équation (3.3.13) comme suit :

$$\xi_{t,T}^{BS}(x_T) = \lambda \left(\frac{x_T}{x_t} \right)^{-\gamma} \quad (3.3.14)$$

qui correspond à la fonction d'utilité puissance. Il est aisé de montrer que la fonction d'utilité dans le cadre du modèle de Black-Scholes est :

$$U^{BS}(x_t) = \left(1 - \frac{\mu - r}{\sigma^2} \right)^{-1} x_t^{\left(1 - \frac{\mu - r}{\sigma^2} \right)} \quad (3.3.15)$$

et la fonction d'aversion au risque est :

$$\rho_t^{BS}(x_T) = \gamma = \frac{\mu - r}{\sigma^2} \quad (3.3.16)$$

Cette équation montre que la fonction d'aversion au risque de Black-Scholes est une constante. Ce résultat vient consolider les résultats trouvés par Friend et Blume (1975) et Sahalia et Lo (2000). L'estimation de l'aversion au risque dans ce modèle revient à l'estimation des paramètres μ et σ .

3.4 L'estimation implicite de l'aversion au risque

Dans la section précédente, on a montré que l'aversion au risque peut être estimée à partir d'une densité neutre au risque et la densité subjective. Dans un premier temps, on va estimer la densité subjective en suivant la même procédure établie par Jackwerth (2000). En revanche, la densité neutre au risque a été estimée dans le deuxième chapitre. Dans un deuxième temps, on va estimer implicitement l'aversion au risque.

3.4.1 L'estimation de la densité neutre au risque

Comme précédemment décrit, il existe une multitude des méthodes pour la densité neutre au risque. Dans cette sous-section, afin d'extraire la DNR, nous utilisons une méthode non structurelle et paramétrique, i.e la méthode mélange de lois log-normales et une méthode structurelle à savoir le modèle de diffusion à sauts, car ils procurent un meilleur ajustement de données historiques comme nous l'avons montré dans le chapitre précédent. Étant donné que ces procédures ont été présentées dans le deuxième chapitre, nous n'allons pas les exposer une fois dans ce qui suit.

3.4.2 L'estimation de la densité subjective

On estime la densité subjective en utilisant le modèle *GARCH*, les paramètres de ce modèle sont estimés à partir des données historiques de l'indice CAC 40. Cette méthode a été élaborée par Jackwerth (2000). Aït Sahliya et Io (2000) ont proposé d'estimer la densité subjective sans faire aucune hypothèse paramétrique sur l'actif sous-jacent.

Notre base de données comporte les cours quotidiens de l'indice CAC 40 du 02/01/2001 au 31/12/2007. La première étape de cette méthode est celle de l'extraction des données à partir d'un mois, deux mois et trois mois précédents suivant la maturité de l'option. On adopte un modèle *GARCH*(1, 1) décrit par :

$$\begin{aligned}\epsilon_t &= \sigma_t Z_t \\ \sigma_t^2 &= \psi + \alpha \epsilon_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2.\end{aligned}\tag{3.4.1}$$

avec Z_t est une innovation *i.i.d* de la loi normale standard. Les rendements de prix d'actifs sous-jacent sont calculés de la manière suivante : $u_\tau = \log\left(\frac{x_T}{x_t}\right)$ avec $\tau = T - t$. Cette série chronologique prise avec son écart-type σ_t sont les entrées pour l'estimation du modèle *GARCH*. Les paramètres ψ , α et β sont estimés par la méthode quasi-maximum de vraisemblance. Après avoir estimé les paramètres du processus *GARCH*, on simule à niveau un processus *GARCH*(1,1), commençant cette fois-ci de la date instantané de l'évaluation en utilisant l'équation 3.4.1, dont les variables inconnues sont les séries chronologiques σ_t et u_t , alors que les paramètres ψ , α et β sont estimés à partir des données historiques. La simulation va créer des séries chronologiques de taille T et elle sera répétée N fois. La simulation de l'indice de prix est donnée par la formule suivante :

$$x_t = x_{t-1}e^{\epsilon_t} \quad \forall t \in \{1, \dots, T\} \quad (3.4.2)$$

avec x_0 est le cours de l'indice à l'instant $t = 0$.

Après avoir simulé les cours de l'actif sous-jacent, nous calculons de nouveau les rendements simulés de prix d'actifs sous-jacent : $u_\tau = \log\left(\frac{x_T}{x_t}\right)$ avec $\tau = T - t$ ⁴. La deuxième étape consiste à estimer la densité subjective par une densité de noyau en utilisant un noyau gaussien et un *bandwidth* h :

$$h = \frac{1.8\sigma}{\sqrt[5]{n}} \quad (3.4.3)$$

$$g(u_\tau) \equiv \frac{1}{T} \sum_{i=1}^T \frac{1}{h_{u_i}} k_u\left(\frac{u_\tau - u_{t_i, \tau}}{h_u}\right). \quad (3.4.4)$$

Suivant Aït Sahlia (2000), à partir de la densité de rendements composés nous pouvons calculer :

$$Pr(x_T \leq x) = Pr(x_t e^{u_\tau} \leq x) = Pr(u_\tau \leq \ln(x/x_t)) = \int_{-\infty}^{\ln(x/x_t)} g(u_\tau) du_\tau \quad (3.4.5)$$

4. Notre but est d'estimer la densité subjective pour des points précis dans le temps, ce qui correspond aux maturités spécifique utilisées pour l'estimation de la densité neutre au risque vues dans le chapitre précédent.

et déterminer le taux d'accroissement de la densité $p_t(\cdot)$ correspondant aux rendements de la densité :

$$p_t(x) = \frac{\partial}{\partial x} Pr(x_T \leq x) = \frac{g(\log(x/x_t))}{x} \quad (3.4.6)$$

Notre estimateur de la densité subjective de l'indice, x_t , est donné par :

$$p_t(x_T) = \frac{g(\log(x_T/x_t))}{x_T} \quad (3.4.7)$$

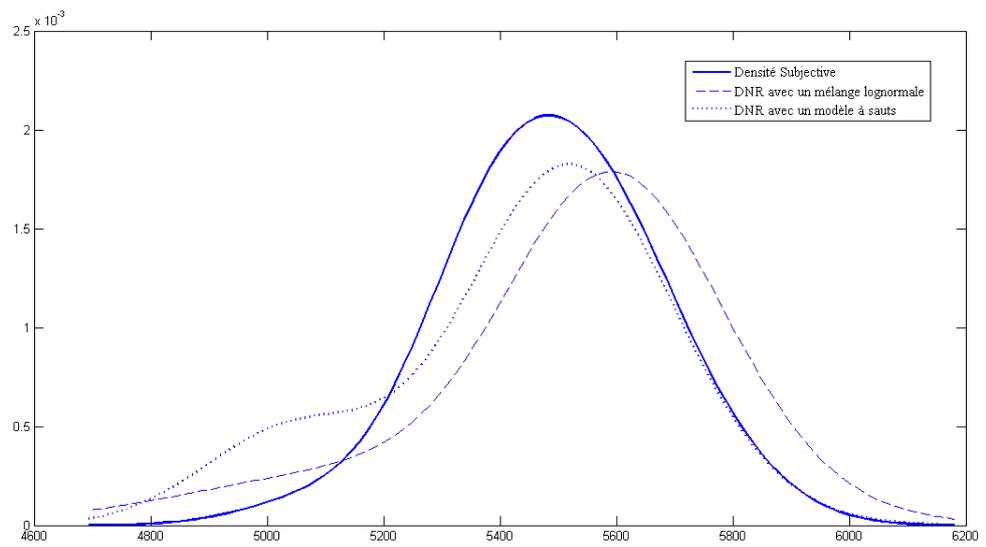
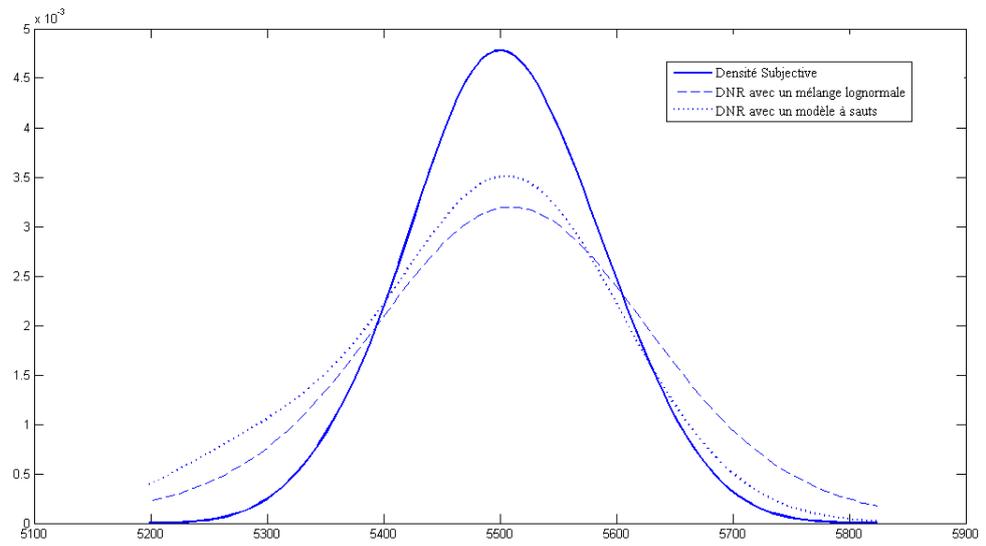
3.4.3 Résultats empiriques

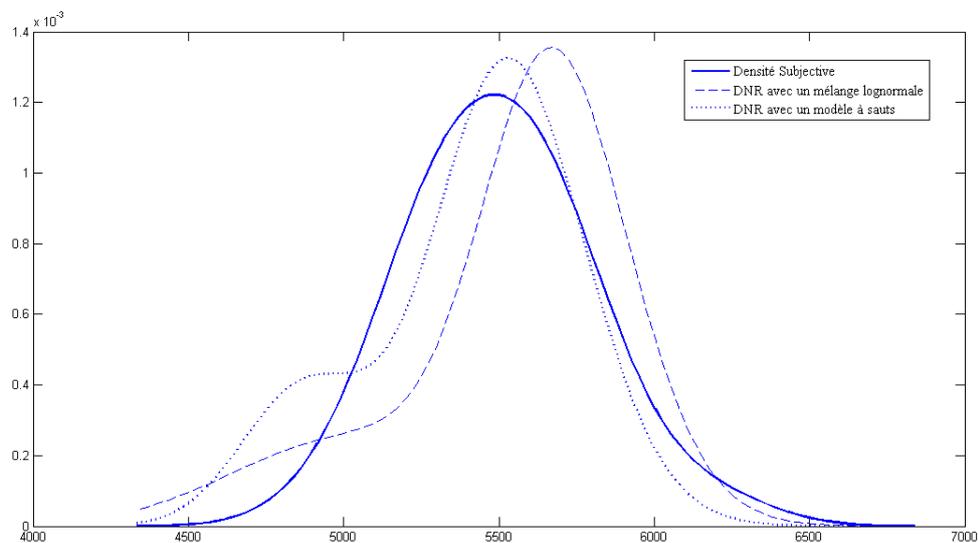
Nous estimons la fonction d'aversion au risque en utilisant les modèles de mélange de log-normales et de diffusion à sauts pour les options sur indice CAC 40 pendant la période s'étalant du 1^{er} Janvier 2007 au 31 Décembre 2007. L'estimation de la densité subjective est fondée sur une série temporelle des rendements de l'indice CAC 40 sur une période 7 ans⁵.

Nous présentons dans les graphiques 3.4.3, 4.3 et 4.2 les DNR par le modèle à saut et le mélange de log-normales, et la densité subjective observée respectivement sur les jours ouvrables 10 Janvier 2007, 10 Juillet 2007 et 17 Octobre 2007 pour trois différentes maturités d'options : un mois, deux mois et trois mois.

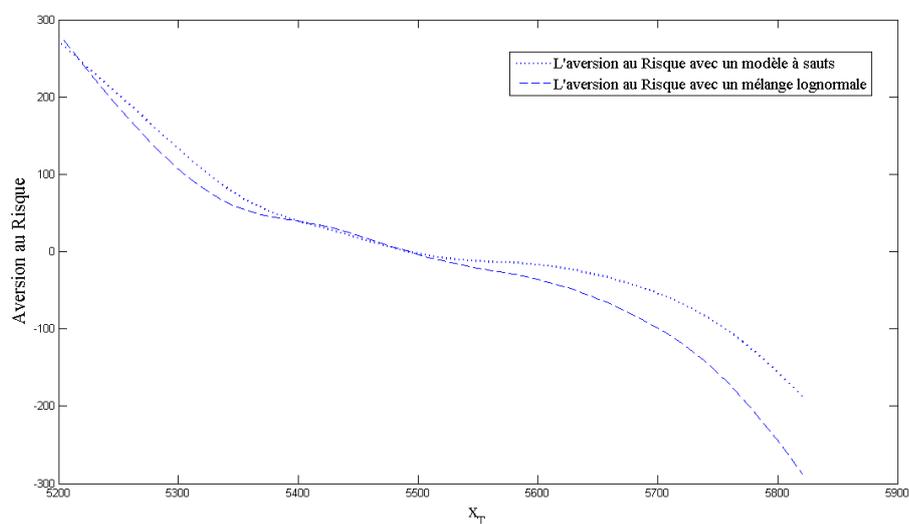
Les graphiques 3.4.3, 4.3 et 4.2 montrent que la distribution neutre au risque et la distribution subjective ont la forme d'une distribution log-normale durant la crise, pré-crise et post-crise. En outre, nous avons constaté que durant la période de la crise, les distributions neutre au risque du modèle log-normal et du modèle à saut sont leptokurtiques et étalées vers la gauche alors que la distribution subjective ne change pas de forme contrairement à ce que préconise Jackwerth et Rubinstein (1996) et Jackwerth (2000). Nous pouvons conclure que la fonction de l'aversion au risque a trop changé autour de la crise. En outre, la distribution subjective ne change pas de forme autour de la période de crise et après la crise contrairement à celles de risque neutre, cela implique de grands changements dans la prime de risque.

5. Jackwerth (2000) a montré que la forme générale de la fonction d'aversion au risque est stable en fonction des différentes tailles de l'échantillon historique de 2, 4 ou 10 ans.





La densité neutre au risque avec un mélange de lois log-normale et modèle à sauts et la densité subjective (10 janvier 2007) pour les maturités 20, 50 et 80 jours.⁶



6. Les DNR et les densités subjectives pour les périodes de crise et après-crise sont en annexes (10 Juillet 2007 et 17 Octobre 2007 respectivement pour différentes maturités).

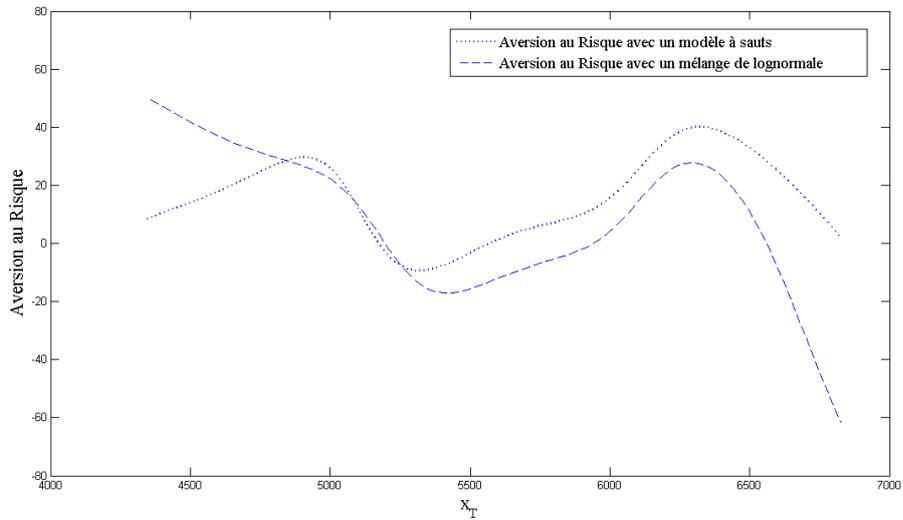
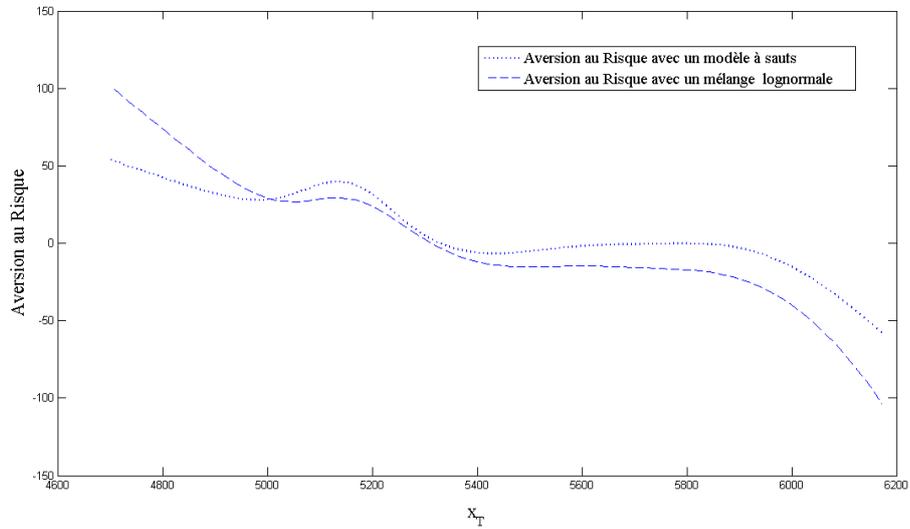


Figure 4.1 – Fonctions d’aversion au risque en pré-crise (10 Janvier 2007) pour différentes échéances (20, 50 et 80 jours).⁸

Nous présentons dans les graphiques 4.1, 4.4 et 4.5 la fonction d’aversion au

8. Fonctions d’aversion au risque pour les périodes de crise et après-crise sont en annexes (10 Juillet 2007 et 17 Octobre 2007 respectivement pour différentes maturités).

risque estimée que nous avons déterminé à la fois à partir d'un modèle de mélange de log-normales et le modèle de diffusion à sauts, observées respectivement sur les jours 10 Janvier 2007, 10 Juillet 2007 et 17 Octobre 2007 pour différentes échéances des options : un mois, deux mois et trois mois. Nous obtenons pour chaque valeur de prix spot à expiration x_T une valeur implicite de l'aversion relatif au risque. Nous notons que l'aversion au risque estimée est positive pour $x_T < x_0$, impliquant une fonction d'utilité concave par contre elle est négative pour $x_T > x_0$. Les fonctions empiriques de l'aversion au risque ne sont malheureusement pas positives et monotones comme suggéré par les hypothèses standard de la théorie économique. Ainsi, les préférences implicites sont d'une fonction relative au risque décroissante à la fonction d'aversion au risque présente une courbe de U vis-à-vis de x_T . En d'autres termes, les prix de marché des options sur CAC 40 et les rendements du marché sur l'indice CAC 40 sont telles que l'agent représentatif devient plus averse au risque lorsque l'indice diminue en valeur, ainsi que pour des valeurs très élevées de l'indice de sorte que les préférences émanent d'une aversion relatif au risque constante ne peut pas saisir ce phénomène accentuant ainsi les différences entre les prix du marché et celui de modèle de Black & Scholes. Ces résultats sont cohérents avec ceux d'Aït-Sahalia et Lo (2000), Jackwerth (2000) et Pérignon et Villa (2002). Il est à noter aussi que les valeurs d'aversion au risque sont très proches des valeurs trouvées par Mehra et Prescott (1985).

L'impact de la maturité résiduelle

Pour les trois jours de négociation que nous avons choisi, nous avons modifié la maturité résiduelle des options d'un mois à deux et trois mois, nous avons constaté que la forme de la fonction de l'aversion au risque n'est pas affectée à la fois pour les échéances de un et deux mois ce qui corrobore les résultats de Jackwerth (2000). En revanche, pour la maturité trois mois, la forme de la fonction d'aversion au risque est clairement affectée. En outre, la courbe en U est plus marquée pour les échéances les plus élevées. Quelle que soit la date de négociation choisie (représentant la pré-crise, la crise ou l'après-crise), si nous avons la même maturité résiduelle, nous gardons la même forme de la courbe.

l'impact de modèle d'estimation de la DNR

Nos résultats montrent que la forme de la fonction d'aversion au risque n'est pas substantiellement affectée si l'on extrait la densité neutre au risque à partir d'un modèle de diffusion de saut ou un mélange de log-normales principalement pour les courtes maturités. En le comparant avec l'impact de la maturité résiduelle, l'impact du modèle sélectionné de la DNR sur la fonction d'aversion au risque est moins important.

L'impact de la date de modélisation (pendant une pré-crise, une crise, une après-crise)

A la différence d'autres études empiriques, Jackwerth (2000) a estimé les fonctions d'aversion absolue au risque sur le marché américain sur différentes périodes (pré-crash et après-crash autour de la crash de 1987). Dans notre étude, nous avons choisi trois dates de négociation 10 Janvier 2007, 10 Juillet 2007 et 17 Octobre 2007. Toutes choses étant égales par ailleurs, l'intervalle de variation de la fonction d'aversion pour le risque en post-crise, lorsque la tendance de marché est haussière, est plus étendue qu'en périodes de pré-crise et crise et ce pour les grandes maturités. En effet, l'intervalle de variation s'élargit de $[-40, 40]$ à $[-50, 100]$ pour une maturité de trois mois.

Il est à noter aussi que l'intervalle de variation de l'aversion au risque implicite ,en utilisant un modèle de diffusion à saut pour la DNR, est égal à $[-50, 50]$ pour la période de pré-crise. Le même intervalle $[-100, 100]$ est obtenu en période de crise et après-crise. Bien que, lorsque nous utilisons un modèle de mélange de log-normales pour la DNR, l'intervalle de variation de l'aversion au risque implicite reste le même égal à $[-100, 50]$ quelle que soit la tendance du marché pour une maturité de deux mois.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons estimé la fonction d'aversion au risque implicite durant deux périodes, pré-crise et post-crise, et pour différentes maturités d'options. Après une estimation de la densité subjective en utilisant la méthode développée par Jackwerth (2000), nous avons choisi pour estimer la densité neutre les modèles à saut et mélange de log-normales puisqu'il semblent offrir le meilleur ajustement d'après le sous chapitre précédent. Par ailleurs, nous avons examiné simultanément l'impact de la maturité, du modèle d'estimation de la densité neutre au risque et de la période d'étude de la fonction d'aversion au risque sur la fonction d'aversion au risque. Nos résultats montrent que les distributions subjectives ont la forme d'une distribution log-normale durant la crise, pré-crise et post-crise. En outre, nous avons constaté que durant la période de crise, les distributions neutre au risque du modèle log-normal et du modèle à saut sont leptokurtiques et étalées vers la gauche alors que la distribution subjective ne change pas de forme contrairement à ce que préconise Jackwerth et Rubinstein (1996) et Jackwerth (2000). Il est à noter aussi que les valeurs d'aversion au risque sont très proches des valeurs trouvées par Mehra et Prescott (1985). Pour les trois jours de négociation que nous avons choisi, nous avons modifié la maturité résiduelle des options d'un mois à deux et trois mois, nous avons constaté que la forme de la fonction de l'aversion au risque n'est pas affectée à la fois pour les échéances d'un et deux mois ce qui corrobore les résultats de Jackwerth (2000). En revanche, pour la maturité trois mois, la forme de la fonction d'aversion au risque est clairement affectée. En outre, la courbe en U est plus marquée pour les échéances les plus élevées. Nos résultats montrent que la forme de la fonction d'aversion au risque n'est pas substantiellement affectée si l'on extrait la densité neutre au risque à partir d'un modèle de diffusion de saut ou un mélange de log-normales. De plus, l'intervalle de variation de la fonction d'aversion pour le risque en post-crise, lorsque la tendance de marché est haussière, est plus étendue qu'en période de pré-crise et crise et ce pour les grandes maturités.

Bibliographie

- [1] **Abken P., Madan D. B. & Ramamurtie R. (1996)**, *Estimation of Risk-Neutral and Statistical Densities by Hermite Polynomial Approximation : With an Application to Eurodollar Futures Options*, Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper 96-5.
- [2] **Abadir K. & Rockinger M. (1997)**, *Density-Embedding Functions*, HEC Working Paper.
- [3] **Aït-Sahalia Y. & Lo A. W. (1998)**, *Non-parametric estimation of state-price densities implied in financial asset prices*, Journal of Finance, vol. 53, pp. 499-517, April.
- [4] **Aït-Sahalia Y. & Lo A. W. (2000)**, *Non-parametric Risk Management and Implied Risk Aversion*, The Journal of Econometrics, 94, 9-51.
- [5] **Alonso A., Ganzala R. & Tusell F. (1990)**, *Asset Pricing and Risk Aversion in the Spanish Stock Market*, Journal of Banking and Finance, Vol. 14. August, pp 351-369.
- [6] **Anagnor I., Mascia B., Stewart D. H. & Tompkins T. (2002)**, *The relation between implied and realised probability density functions*, Working Paper University of Technology Vienna.
- [7] **Azzalini A. & Bowman A. W. (1997)**, *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis*, London :Oxford University Press.
- [8] **Bahra B. (1996)**, *Probability distributions of future asset prices implied by option prices*, Bank of England Quarterly Bulletin : August 1996, 299-311.

- [9] **Bates D. S. (1976)**, *The Crash of '87' : Was It Expected? The Evidence from Option Markets*, Journal of Finance, Vol. 46, pp 1009-1044.
- [10] **Black F. (1976)**, *The Pricing of Commodity Contracts*, Journal of Financial Economics, Vo. 3, pp 167-179.
- [11] **Black F. & Scholes M. (1973)**, *The pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, Vol. 81, pp. 637-659, May-June.
- [12] **Bliss R. & Panigirtzoglou N. (2002)**, *Testing the Stability of Implied Probability Density Functions*, Journal of Banking and Finance, 26, pp. 381-422, March.
- [13] **Bliss R. & Panigirtzoglou N. (2004)**, *Option-implied Risk Aversion Estimates*, Journal of Finance, Vol. 59, No. 1, pp. 407-446.
- [14] **Blume M. E. & Friend I. (1975)**, *The Demand for Risky Assets*, American Economic Review, Vol. 65, pp.900-922.
- [15] **Boes M. J., Drost F. C. & Bas J. M. W. (2005)**, *Nonparametric Risk-Neutral Return and Volatility Distributions*, Tilbury University, Working Paper.
- [16] **Breedon D. T. & Litzenberger R. H. (1978)**, *Prices of state-contingent claims implicit in option prices*, Journal of Business, Vol. 51, pp. 621-651, October.
- [17] **Campa J. M., Chang P. H. K. & Reider R. L. (1998)**, *Implied Exchange Rate Distributions : Evidence from OTC Options Markets*, Journal of International Money and Finance, Vol. 17, No. 1, pp. 117-160.
- [18] **Coutant S. (1999)**, *Implied risk aversion in option prices using hermite polynomials*, in *Estimating and interpreting probability density function*, Bank for International Settlements.
- [19] **Coutant. S (2001)**, *Contenu en information dans le prix d'options : estimation de la densité neutre au risque du sous-jacent et applications*, Thèse, Université Paris Dauphine.
- [20] **Coutant S., Rockinger M. & Jondeau E. (2001)**, *Reading PIBOR Futures Options Smile : The 1997 Snap Election*, Journal of Banking and Finance, Vol. 25, No. 11, pp. 1957-1987.

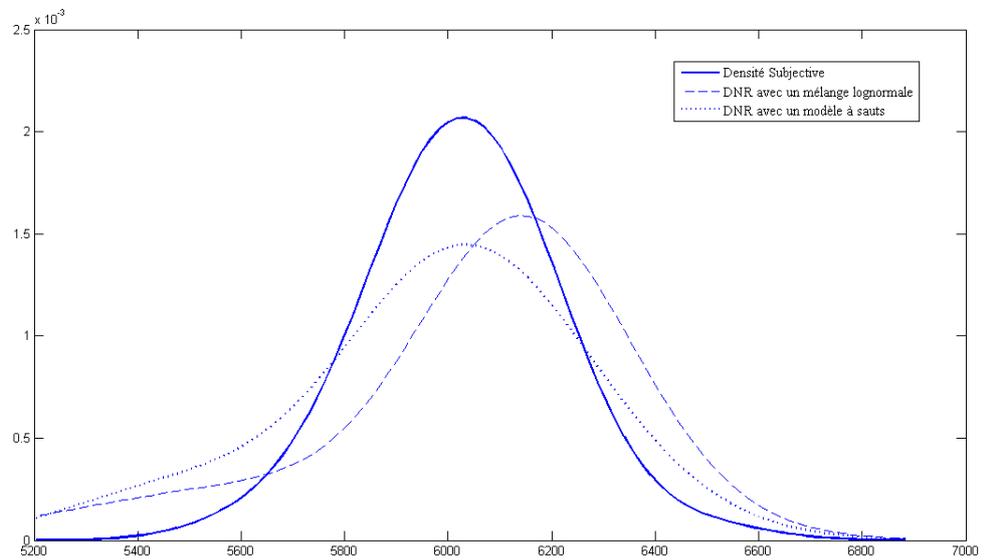
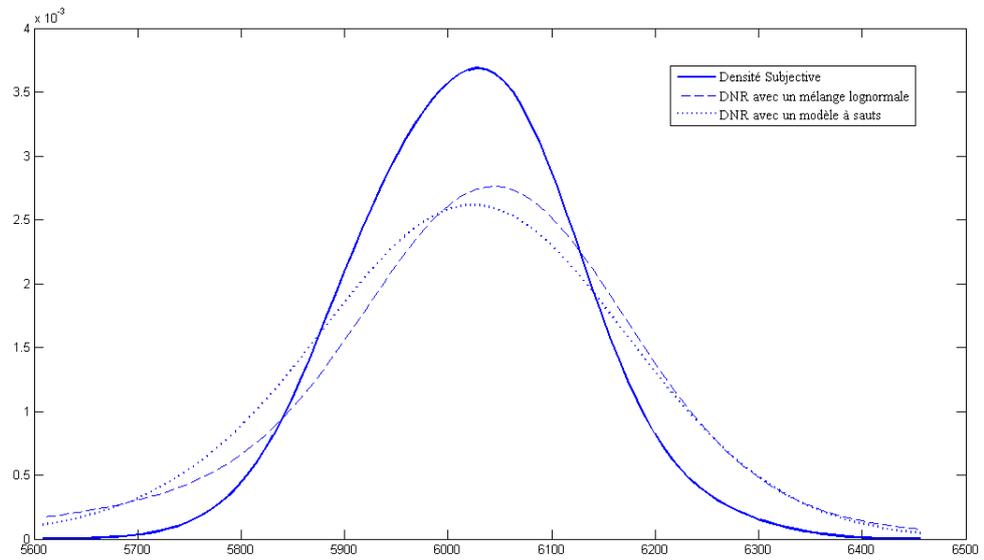
- [21] **Cox J. C. & Ross S. A. (1976)**, *The valuation of option for alternative stochastic processus*, Journal of Financial Economics, Volume. 3, Issues 1-2, January-March 1976, pp. 145-166.
- [22] **Enzo G., Handel M. & Härdle W. K. (2006)**, *Time Dependent Relative Risk Aversion*, SFB 649 Discussion Papers SFB649DP2006-020, Sonderforschungsbereich 649, Humboldt University, Berlin, Germany.
- [23] **Heston S. L. (1993)**, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Review of Financial Studies, Vol. 6, pp. 327-343.
- [24] **Jackwerth J. C. & Rubinstein M. (1996)**, *Recovering Probability Distributions from option Prices*, Journal of Finance, Vol. 51, pp. 1611-1631.
- [25] **Jackwerth J. C. (2000)**, *Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns*, The Review of Financial Studies, Vol. 13, pp. 433-451.
- [26] **Jarrow R. & Rudd A. (1982)**, *Approximate valuation for arbitrary stochastic processes*, Journal of Financial Economics, Vol. 10, pp. 349-369.
- [27] **Jondeau E. & Rockinger M. (1997)**, *Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis*, Mathematical Finance, 4, 223-245.
- [28] **Jondeau E. & Rockinger M. (2000)**, *Reading the smile : the message conveyed by methods which infer risk neutral densities*, Journal of International Money and Finance, Vol. 19, pp. 885-915.
- [29] **Jondeau E., Ser-Huang P. & Rockinger M. (2007)**, *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*, book, Library of Congress Control Number : 2006923899.
- [30] **Jondeau E. & Rockinger M. (2000)**, *Gram-Charlier densities*, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 25, pp. 1457-1483.
- [31] **Madan D. B. & Milne F. (1994)**, *Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis*, Mathematical Finance, Vol. 4, N. pp. 223-245.
- [32] **Madan D. B. & Milne F. (2002)**, *Extracting Information from Option Markets : Smiles, State-Price Densities and Risk-Aversion*, European Financial Management, Vol. 8, N. 4, pp. 495-513.

- [33] **Malz A. M. (1997)**, *Estimating the probability distribution of the future exchange rate from options prices*, Journal of Derivatives, pp. 18-36.
- [34] **Melik W. R. & Thomas C. P.(1997)**, *Recovering an asset's implied PDF from options prices : an applications to crude oil during the Gulf crisis*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 32, pp. 91-116.
- [35] **Nakamura H. (2007)**, *Testing The Structural Stability of A Risk Aversion Parameter in the Foreing Oreign Exchange Market*, Journal compilation of the Japanese Economic Association, Vol. 47 Issue 3, pp. 286-296.
- [36] **Nishiyama Y. (2007)**, *Are Banks Risk-Averse ?*, Eastern Economic Association, vol. 33(4), pp. 471-490.
- [37] **Panigirtzoglou N. & Skiadapoulos G. (2004)**, *A new approach to modeling the dynamics of implied distribution : Theory and Evidence from the S&P 500 Options*,Journal of Banking and Finance, Vol. 28, pp. 1499-1520.
- [38] **Pérignon C. & Villa C. (2002)**, *Extracting information from options markets : Smiles, state-price densities and risk aversion*, European Financial Management Vol. 8, pp. 495-513.
- [39] **Rosenberg J. & Engle R. (1997)**, *Option Hedging Using Empirical Pricing Kernels*, Working paper, New York University.
- [40] **Rubinstein M. (1994)**, *Implied binomial trees*, Journal of Finance, Vol. 49, pp. 771-818.
- [41] **Sherrick B. J., Garcia P. & Tirupattur V. (1996)**, *Recovering probabilistic information from option markets : tests of distributional assumptions*, Journal of Futures Markets, Vol. 16, pp. 545-560.
- [42] **Shimko D. C. (1993)**, *Bounds of probability*, Risk, Vol. 6, pp. 33-37.
- [43] **Silverman B. W. (1986)**, *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Monographs on Statistics and Applied Probability, London : Chapman and Hall.
- [44] **Szpiro G. G. (1986)**, *Measuring Risk Aversion : An Alternative Approach*, Review of Economics and Statistics, Vol. 68, pp. 156-159.

- [45] **Tarashev N., Tsatsaronis K. & Karampatos D. (1994)**, *Investors' attitude towards risk : what can we learn from options ?*, BIS Quarterly Review, pp. 57-65.

Appendices

C.1 Les DNR par le modèle à saut et le mélange de log-normales, et la densité subjective



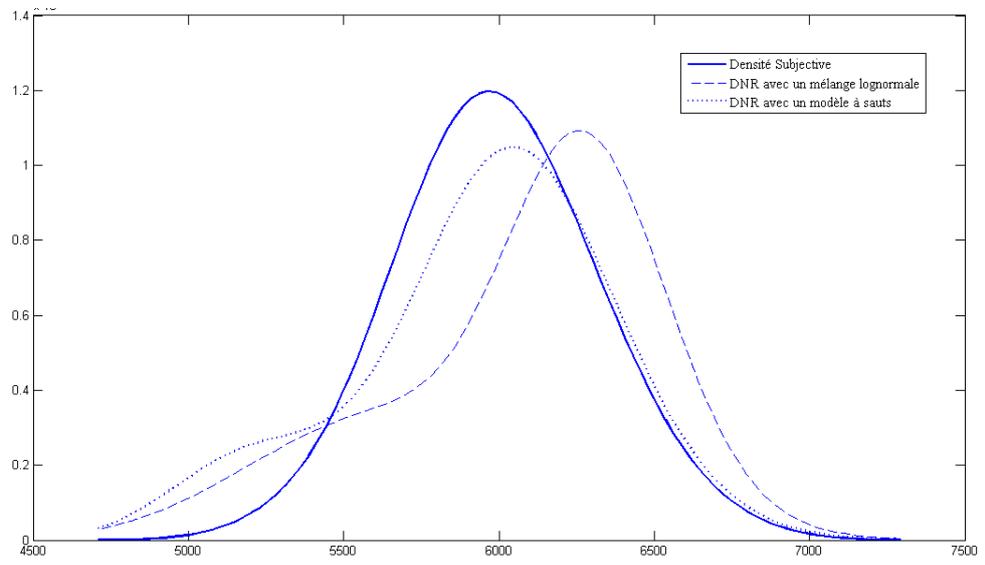
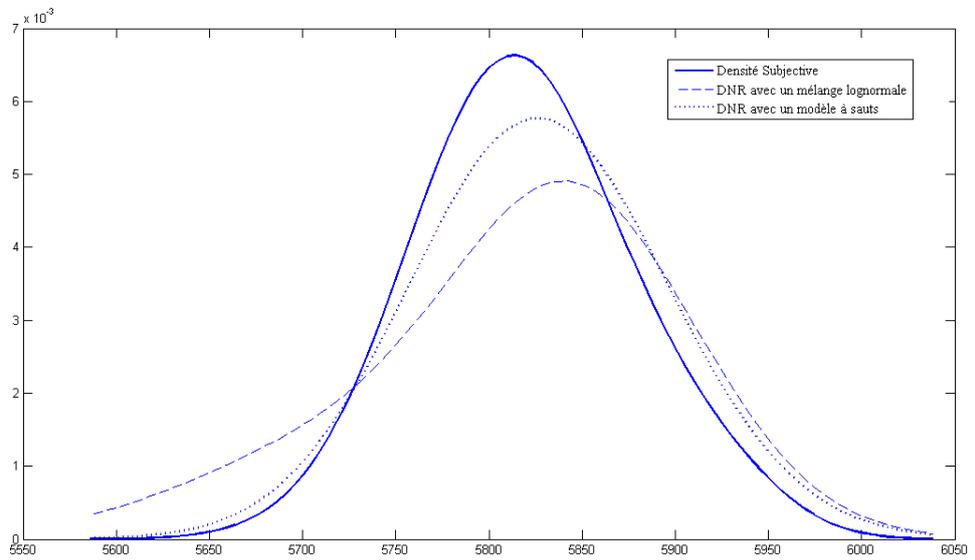


Figure 4.2 – Densités Neutre au Risque avec un modèle à sauts et un mélange de lois log-normales et la densité Subjective pour la date 10/07/2007 pour les maturités 20 jours, 50 jours et 80 jours.



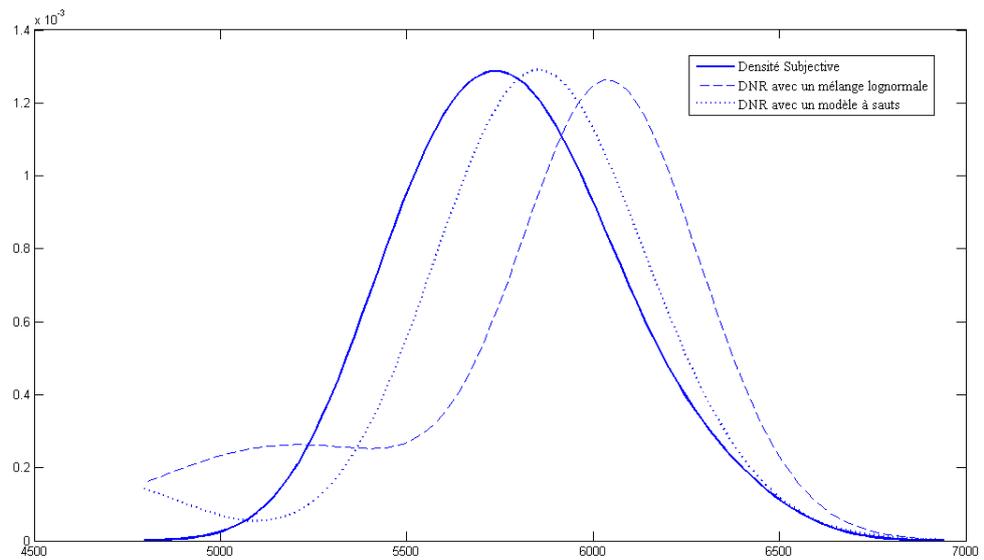
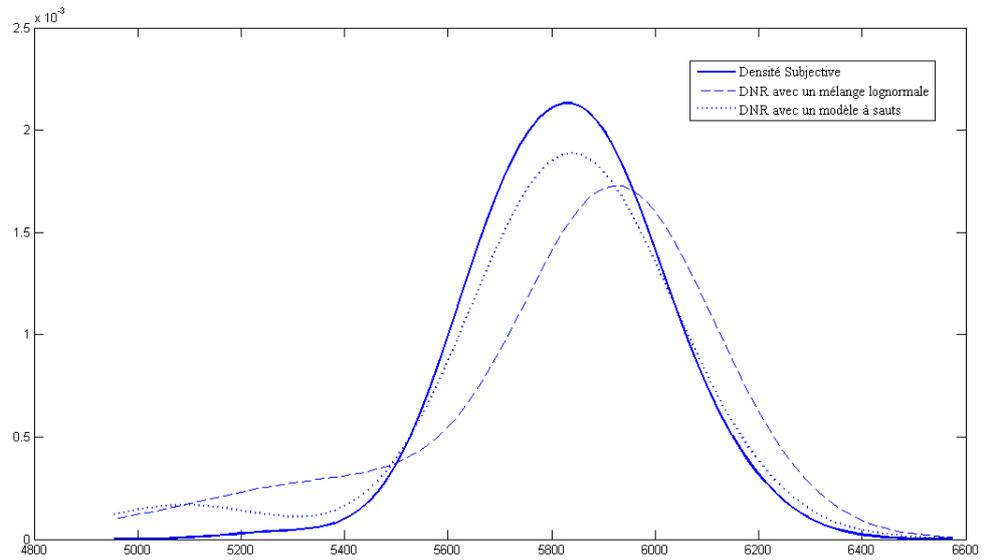
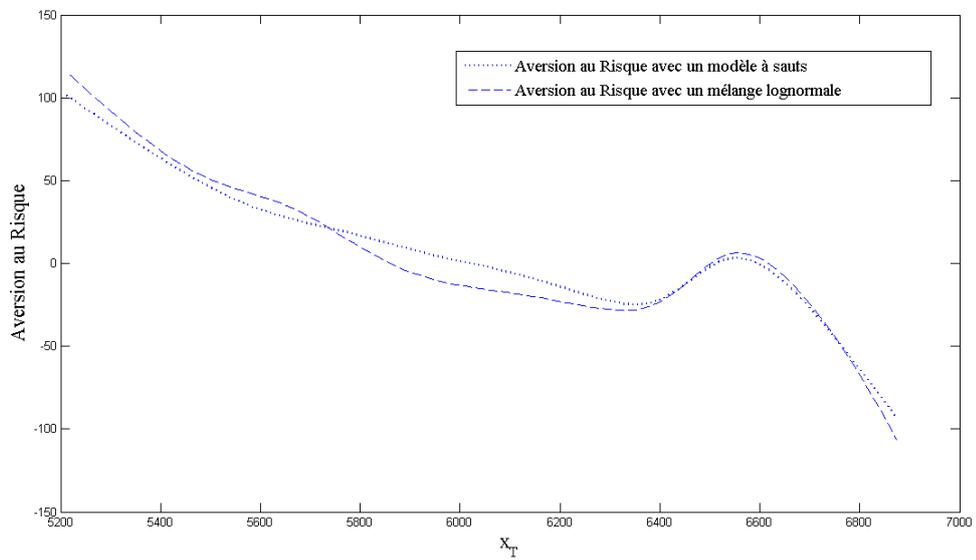
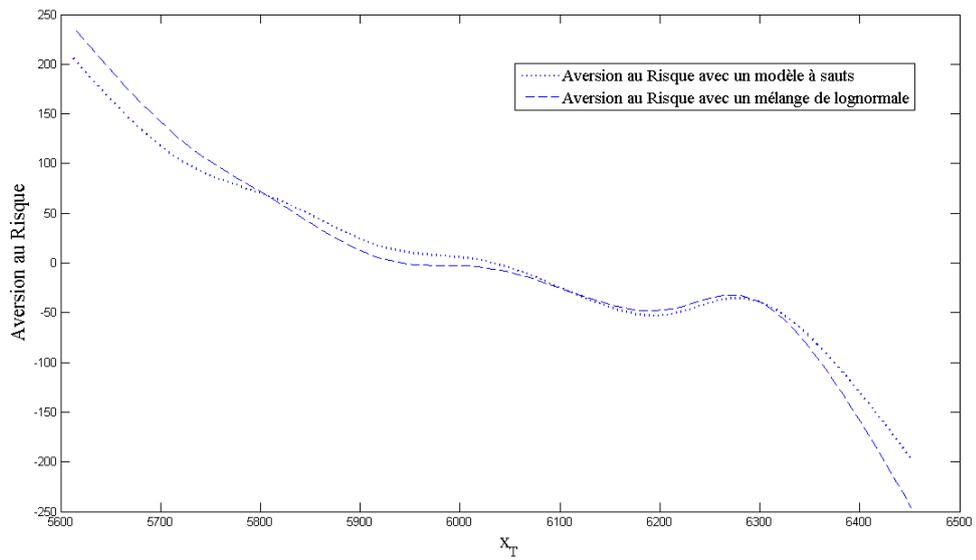


Figure 4.3 – Densités Neutre au Risque avec un modèle à sauts et un mélange de lois log-normales et la densité Subjective pour la date 17/10/2007 pour les maturités 13 jours, 43 jours et 73 jours.

C.2 La fonction d'aversion au risque estimée par un mélange de lois log-normales et un modèle à sauts



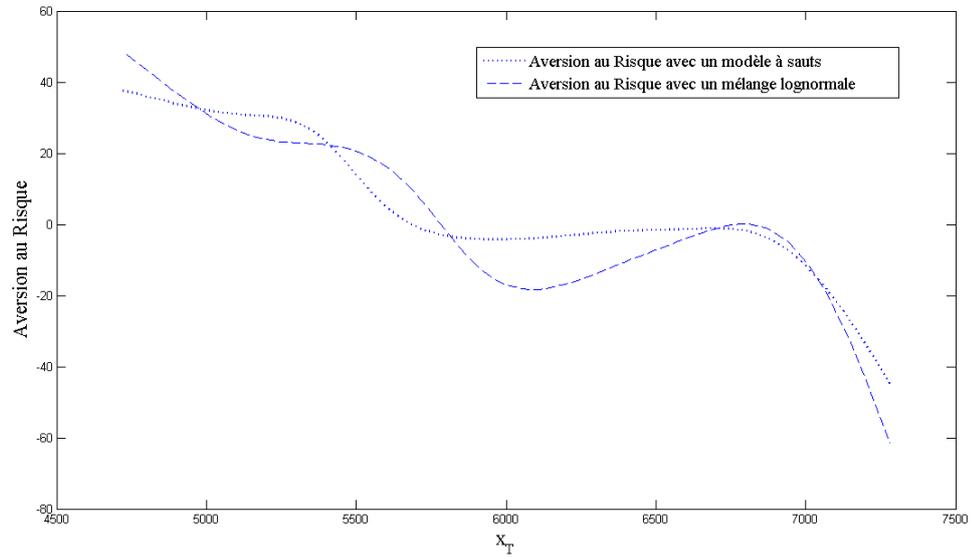
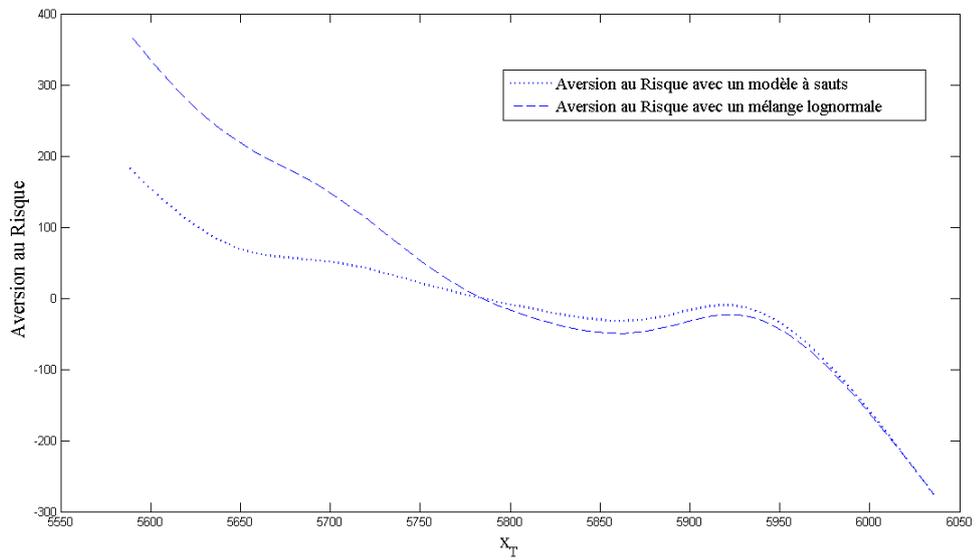


Figure 4.4 – La fonction d’aversion au risque avec un modèle à sauts et un mélange de lois lognormales et un modèle à saut pour la date 10/07/2007 pour les maturités 20 jours, 50 jours et 80 jours



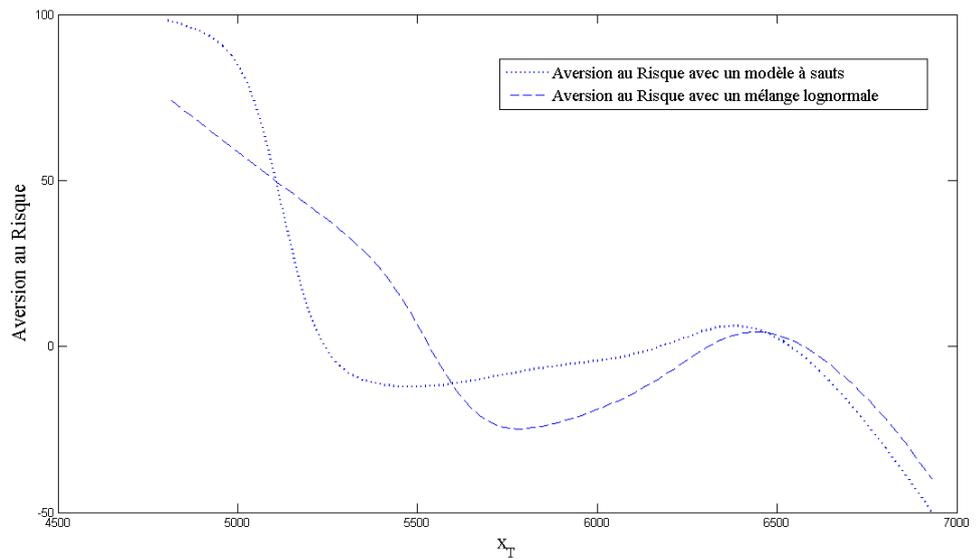
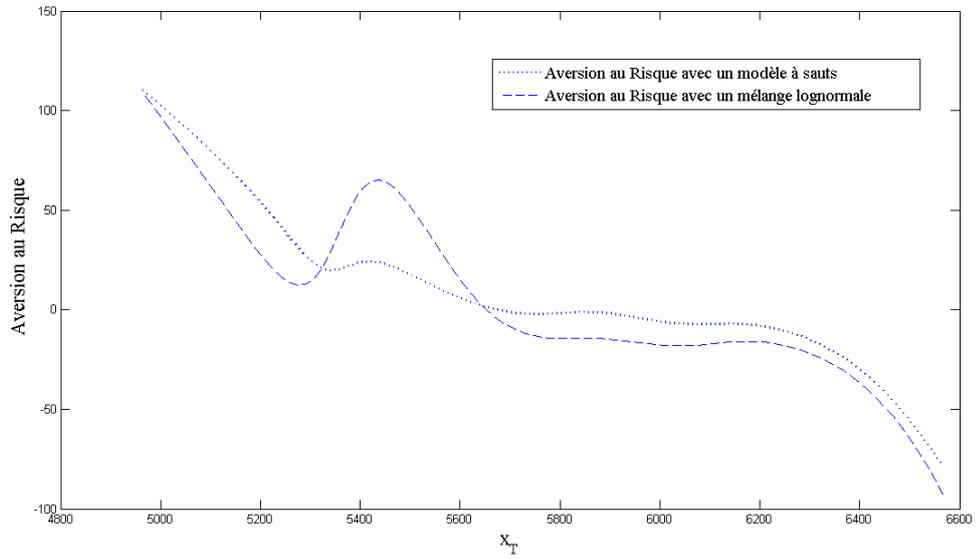


Figure 4.5 – La fonctions d'Aversion au risque avec un modèle à sauts et avec un mélange de lois log-normales pour la date 17/10/2007 pour les maturités 13 jours, 43 jours et 73 jours

Troisième partie

**STRATÉGIE DE
COUVERTURE OPTIMALE
ET RISQUE MINIMAL :
STRATÉGIE DE
COUVERTURE ET LES
FONCTIONS D'UTILITÉS**

STRATÉGIE DE COUVERTURE OPTIMALE ET RISQUE MINIMAL : STRATÉGIE DE COUVERTURE ET LES FONCTIONS D'UTILITÉS

But de chapitre

L'objectif dans ce chapitre est d'aborder d'emblée la deuxième question principale de cette thèse, à savoir déterminer une stratégie de couverture en se fondant sur les fonctions d'utilité dans un marché caractérisé par des fluctuations non gaussiennes. Dans un premier temps, nous allons déterminer une stratégie de couverture statique qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative, caractérisée par une aversion au risque absolue et une stratégie de couverture statique qui maximise la fonction d'utilité isoélastique, caractérisée par une aversion au risque relatif. Une comparaison entre les résultats obtenus à partir de la couverture en delta de Black-Scholes (1973), le ratio de couverture qui minimise la variance de Bouchaud et Potters (1997, 2000) et le ratio de couverture qui minimise le moment d'ordre quatre de Bouchaud et Selmi (2003) d'une part, et le ratio qui maximise l'approche de l'utilité espérée d'autre part, est systématiquement présentée. Dans un deuxième

temps, nous cherchons une stratégie de couverture dynamique en se basant toujours sur la fonction d'utilité. Dans une optique de contrôler dynamique, il est souvent souhaitable de surveiller, en fonction de l'évolution du cours de l'actif sous-jacent, le risque du portefeuille et de procéder ainsi à de réajustements périodiques.

4.1 Introduction

Black-Scholes, en proposant en 1973 leur célèbre modèle d'évaluation des options, ont donné le point de départ de la théorie de couverture des produits dérivés. Ils supposent, sous certaines hypothèses, qu'il est possible de construire des stratégies de couverture "parfaite", dans le sens que le risque associé à l'émission d'une option est nul. Cette approche a fait l'objet d'une très vaste littérature sous forme d'articles ou d'ouvrages financiers. Merton (1973) prolonge ce modèle pour le cas d'une volatilité déterministe non constante. Il démontre, alors, qu'une couverture parfaite est possible si la volatilité moyenne est utilisée comme volatilité du titre sous-jacent dans l'équation de Black-Scholes. Dans Galai (1983) nous trouvons une analyse des performances de la stratégie de couverture en delta d'options sur des actions négociés sur le Chicago Board Option Exchange (CBOE). Boyle et Emmanuel (1980) montrent que, lorsque la réplcation du portefeuille est effectué de façon discrète, les mouvements de l'option et de l'actif sous-jacent ne sont plus corrélés. Ils concluent que la couverture n'est donc plus parfaite. Quand à Leland (1985) détermine un ratio de couverture donné par le delta de l'option mais avec une volatilité ajustée des frais de transaction. Il montre que les relations d'arbitrage dérivées du modèle de Black-Scholes ne tiennent plus en présence de frais de transaction. En revanche, Kabanov et Safarian (1997) évaluent l'erreur de couverture de la stratégie de Leland (1985) pour la valorisation d'un call européen en présence de frais de transaction. Ils montrent que cette erreur de couverture ne s'annule pas même quand les frais de transaction sont constantes. Dans Engle et Rosenberg (1994, 1995), les auteurs suggèrent de suivre la stratégie de couverture en delta mais avec une volatilité stochastique. Ils montrent que les valeurs estimées de delta par un processus GARCH sont équivalentes aux valeurs delta dérivées de modèle de Black-Scholes (1973). Par contre, les valeurs de gamma estimées par ces deux modèles sont différentes.

Cette approche de couverture en delta n'existe que dans un monde gaussien où les fluctuations de l'actif sous-jacent sont gaussiennes. La notion de risque "zéro" est loin de la réalité. Une autre approche alternative consiste à minimiser le risque afin de déterminer la stratégie de couverture optimale. On parle d'une stratégie de couverture optimale à risque minimal.

Certains auteurs ont considéré la variance comme une mesure du risque, nous citons par exemple Föllmer et Sandernaman (1986), Föllmer et Schweizer (1991), Bouchaud et Potters (1997,2000,2002), Bouchaud (2002), Baaquie, Lianga et Warachka (2007), Hulley et Mcwaler (2008), pour la recherche d'une stratégie de couverture optimale. Par contre, dans un marché caractérisé par des fortes fluctuations, la variance ou encore le moment d'ordre deux, est incapable d'identifier les risques extrêmes. Pour pallier à ce problème, Bouchaud et Selmi (2003) proposent l'utilisation d'un moment d'ordre quatre comme une mesure de risque. En effet, les grandes fluctuations sont mieux captées par le moment d'ordre quatre que par le moment d'ordre deux. Ces auteurs montrent que la stratégie de couverture qui minimise le moment d'ordre quatre est plus efficace que celle qui minimise la variance. Dans le même contexte, Pochart et Bouchaud (2004) proposent une méthode fondée sur la simulation de Monte-Carlo pour évaluer et couvrir les options dans un marché incomplet. Quant à Johannes et Poulsen (2008), ils déterminent une couverture statique pour des options à barrière¹. Baaquie, Lianga et Warachka (2007) cherchent une stratégie de couverture pour les options sur le LIBOR.

Notre approche consiste à chercher une stratégie de couverture qui tient compte de la psychologie de l'investisseur. Plus précisément, un ratio de couverture qui dépend de la fonction d'aversion au risque de l'investisseur. Nous avons déterminé dans le premier chapitre de cette thèse des mesures de risque en faisant appel aux fonctions d'utilité ((1.4.13), (1.4.15) et (1.4.16)). Plus concrètement, nous avons

1. Les options à barrières (en anglais *barrier options*) qui s'activent (option in) ou se désactivent (option out) selon que le cours du sous-jacent atteint et dépasse (options up) ou passe au dessous (option down) d'un niveau de référence déterminé à l'avance appelé barrière.

déterminé théoriquement des mesures de risque fondées sur les fonctions d'utilité de l'investisseur et qui tiennent compte des moments d'ordre trois et quatre qui est plus sensible aux grandes fluctuations. Telle est la question que les développements théoriques et empiriques que nous présenterons dans ce chapitre. Tout au long de ce chapitre, nous comparons cette stratégie de couverture avec celles en delta, qui minimise le moment d'ordre deux (l'optimisation quadratique), et qui minimise le moment d'ordre quatre (l'optimisation quartique).

Ce chapitre est organisé comme suit. Dans la deuxième section, nous présentons très brièvement la célèbre stratégie de couverture en delta de Black-Scholes (1973). La troisième section, nous citons le cadre général de notre travail ainsi que les hypothèses de base. Dans la quatrième section, nous cherchons la stratégie statique optimal via la maximisation de la fonction d'utilité. Nous comparons cette stratégie de couverture avec celles en delta, qui minimise le moment d'ordre deux (l'optimisation quadratique) , et qui minimise le moment d'ordre quatre (l'optimisation quartique). La recherche d'une stratégie de couverture dynamique via l'approche de l'utilité espérée fait l'objet de la cinquième section. La dernière section conclut le chapitre.

4.2 Stratégie de couverture en delta Δ de Black-Scholes (1973) et le risque zéro

4.2.1 Stratégie *stop-loss*

Un raisonnement tout à fait élémentaire permet d'acheter à l'instant initial l'actif sous-jacent c-à-d $\phi = 1$ et d'établir une stratégie de couverture parfaite ; on parle alors d'une option protégée. Cette stratégie présente un risque énorme. En effet, si le cours de sous-jacent baisse, la prime de l'option encaissée initialement, C , ne suffirait plus à couvrir la perte. Dans le cas contraire, c'est-à-dire quand l'investisseur choisit de ne rien faire, donc $\phi = 0$; on parle d'une option non couverte, et dans ce cas il risque de grosses pertes. Plus clairement, si l'actif sous-jacent subit une forte fluctuation à l' hausse et par la suite le cours de sous-jacent est largement supérieur au prix d'exercice à l'échéance, l'investisseur serait dans l'obligation d'acheter le

sous-jacent trop cher pour honorer son engagement.

Une stratégie de couverture alternative connue sous le nom *stop-loss* consiste à acquérir une option protégée quand le cours de sous-jacent à l'instant t est supérieur au prix d'exercice x_s et une option non couverte dans le cas contraire. En d'autres termes, la stratégie *stop-loss* est une stratégie de trading, simple, qui permet de répliquer la fonction de paiement d'une option. Théoriquement, cette stratégie s'avère efficace. En effet, l'investisseur peut réaliser un profit certain puisque le coût de cette stratégie, qui est égale² à $\max(x_0 - x_s, 0)$, est dans tous les cas inférieur à la prime d'option reçue : $C > \max(x_0 - x_s, 0)$. Cependant, en pratique, cette stratégie souffre de coûts de transactions qui risquent d'être élevés. En effet, le coût total de la couverture est :

$$\max(x_0 - x_s, 0) + vx_0 1_{x_0 > x_s} + \sum_i^n vx_s, \quad (4.2.1)$$

où v est le pourcentage des frais des transactions appliqué au montant négocié et n est le nombre de dates d'intervention³. Autrement dit, si on intègre le coût de courtage et que le cours de l'actif sous-jacent fluctue beaucoup, ce qui correspond bien à la réalité, n devient assez grande. De plus les coûts de cette stratégie peuvent être amplifiés dans la mesure où l'émetteur ne réussit pas toujours à effectuer ses ordres, comme prévu, au prix d'exercice dans un marché qui fluctue énormément et surtout de manière discontinue. Il achète le sous-jacent à un prix plus élevé que les prix d'exercice et le vend à un prix inférieur que le prix de l'exercice.

Malgré, la simplicité de cette stratégie de couverture, elle s'avère inefficace. En effet, elle est trop coûteuse si le cours de l'actif sous-jacent fluctue beaucoup au cours du temps.

Une des plus célèbres stratégies de couverture dans le milieu académique et professionnel est la stratégie de couverture en delta de Black-Scholes (1973). La

2. Dans un marché sans frais de courtage

3. n devient grand si le cours de sous-jacent fluctue avec une forte volatilité, les coûts du total deviennent énormes

présentation de cette stratégie fait l'objet de la sous-section suivante.

4.2.2 Le modèle de Black-Scholes et la couverture en delta

Nous supposons que les marchés sont efficaces, c'est à dire qu'il n'y a pas de coûts de transaction, pas de restrictions sur le volume des transactions et enfin pas d'opportunité d'arbitrage. Nous supposons en plus que les rendements du sous-jacent sont gaussiens, stationnaires et indépendants.

Nous considérons un portefeuille noté W_t , constitué de ϕ_t d'actifs sous-jacents et d'un Call :

$$W_t = \varepsilon (C_t - \phi_t x_t)$$

Dans le cas où $\varepsilon = 1$, l'investisseur achète une option d'achat et vend ϕ_t de l'actif sous-jacent, et dans le cas où $\varepsilon = -1$, il vend une option d'achat et achète ϕ_t de l'actif sous-jacent, l'application d'un résultat mathématique connu sous le nom de lemme d'Itô, montre que le prix C d'un Call ou d'un autre produit dérivé écrit sur le même sous-jacent, satisfait la relation suivante :

$$dC_t = \left(\frac{\partial C_t}{\partial x_t} \mu x_t + \frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial x_t^2} \sigma^2 x_t^2 \right) dt + \frac{\partial C_t}{\partial x_t} \sigma x_t dz. \quad (4.2.2)$$

Le modèle de Black-Scholes (1973) suppose que l'actif sous-jacent suit un processus brownien géométrique en temps continu :

$$\frac{dx_t}{x_t} = \mu dt + \sigma dz_t \quad (4.2.3)$$

avec μ et σ sont deux constantes, et l'accroissement dz_t est le mouvement brownien géométrique qui suit la loi gaussienne centrée et d'écart type \sqrt{dt} . La variation instantanée du portefeuille est donnée par :

$$dW_t = \left(\phi_t - \frac{\partial C_t}{\partial x_t} \right) dx_t + \left(-\frac{\partial C_t}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial x_t^2} \sigma^2 x_t^2 \right) dt \quad (4.2.4)$$

$$dW_t = W_{t+1} - W_t. \quad (4.2.5)$$

Pour couvrir et même éliminer le risque de ce portefeuille dû à la variation stochastique dx_t , d'où la notion de la couverture parfaite, il suffit d'annuler le premier terme à gauche de cette équation 4.2.4. Plus précisément, il faut choisir $\phi_t^* = \frac{\partial C_t}{\partial x_t}$

en actif sous-jacent. Sous cette conduction, la composition du portefeuille de risque zéro au sens de Black-Scholes à l'instant t est définie ainsi :

$$\begin{cases} \phi_t^* = \Delta_t = \frac{\partial C_t}{\partial x_t} & \text{sous jacent (position longue)} \\ 1 & \text{option (position courte)} \\ M_t^* = C_t - \frac{\partial C_t}{\partial x_t} x_t \end{cases}$$

où M_t^* est le cash résiduel résultant de l'achat de la quantité Δ_t sous-jacent investi au taux sans risque. D'après l'équation (4.2.2), le delta ou le ratio de couverture n'est rien d'autre que la dérivée première du prix de l'option par rapport au cours de sous-jacent :

$$\begin{cases} \phi_t^* = \Delta_t = \frac{\partial C_t}{\partial x_t} = N(d_{1,t}) : \text{option d'achat} \\ \phi_t^* = \Delta_t = \frac{\partial P_t}{\partial x_t} = N(d_{1,t}) - 1 : \text{option de vente} \end{cases}$$

avec $N(\cdot)$ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et $d_{1,t}$ définie par l'équation (2.2.11).

Nous remarquons que le *delta* mesure la variation du prix de l'option consécutive suite à une variation faible du cours de sous-jacent. Le ratio de couverture pour une option d'achat est compris entre 0 et 1 et entre -1 et 0 pour une option de vente. Quand l'option est profondément dans la monnaie c-à-d $x_t \gg x_s$, $d_{1,t} \rightarrow \infty$ par conséquent $N(d_{1,t}) \rightarrow 1$, le ratio de couverture est égal à 1, comme il se doit. En d'autres termes, dès que l'option est dans la monnaie, l'émetteur d'une option d'achat devrait s'approvisionner en actif sous-jacent pour honorer son engagement. La probabilité que l'option finisse, à l'échéance, dans la monnaie est quasi certaine. Symétriquement, si l'option est profondément en dehors de la monnaie c-à-d $x_t \ll x_s$, $d_{1,t} \rightarrow -\infty$ par conséquent $N(d_{1,t}) \rightarrow 0$ comme il se doit. Ceci est expliqué par le fait que l'option est en dehors de la monnaie. Il serait alors inutile que l'émetteur d'une option d'achat achète l'actif sous-jacent, car la probabilité que l'option finisse, à l'échéance, dans la monnaie est quasi nulle. Dans ce cas et d'après l'équation (4.2.2), la prime de l'option initialement encaissée est totalement investie dans l'actif monétaire. Et enfin, si l'option est à la monnaie c'est à dire $x_t \simeq x_s$, le ratio de couverture est légèrement égal à 1/2, puisque la distribution de l'actif sous-jacent log-normale est légèrement asymétrique à droite.

De plus, pour que le portefeuille ainsi défini demeure couvert, il faut que sa composition soit révisée continuellement jusqu'à l'échéance de l'option car le delta du call ne cesse de se modifier. La nécessité d'ajuster continuellement est expliquée par la variation du cours de l'actif sous-jacent. On dit alors qu'il faut effectuer un rééquilibrage dynamique du portefeuille pour le maintenir couvert. Le réajustement du portefeuille est mesuré par le *Gamma*, noté par Γ mesure la sensibilité du Δ par rapport aux variations du sous-jacent. On peut aussi le définir comme la fréquence d'ajustement de la delta-couverture d'un portefeuille. Le gamma d'un call, selon le modèle de Black-Scholes est égal à l'expression suivante :

$$\Gamma_t = \frac{\partial \Delta}{\partial x_t} = \frac{\partial^2 C_t}{\partial x_t^2} = \frac{N'(d_{1,t})}{\sigma x_t \sqrt{T}}. \quad (4.2.6)$$

Le ratio de couverture Γ exige beaucoup moins de rééquilibrage que la simple couverture delta car elle prend en compte les changements du delta au voisinage du prix actuel de l'actif sous-jacent. En effet, si le "Gamma" est faible, le delta varie lentement et il n'est donc pas nécessaire d'ajuster fréquemment le portefeuille pour maintenir celui-ci delta-neutre, de même, si le gamma est important (en valeur absolue), le delta devient très sensible aux variations de l'actif sous-jacent.

D'après l'équation (4.2.6), le Γ décroît en fonction de la maturité. Plus précisément, pour une option d'achat à la monnaie et de faible maturité a, toute chose égale par ailleurs, la valeur de "Gamma" la plus élevée. Plus "Gamma" est élevée plus le risque de se trouver en position sous-couvert ou sur-couvert est important. Cependant, les options dans ou en dehors de la monnaie ont pratiquement un Γ nul. Ceci dû au fait que, dans un univers gaussien, le Δ reste quasi inchangé.

Paradoxalement, il se trouve que la stratégie de couverture en Δ trouve ses limites dans les hypothèses qui la justifient. Premièrement, l'hypothèse de l'évaluation discontinue du sous-jacent n'est pas assurée dans la pratique, puisqu'il serait irréal d'approcher l'intervalle de temps entre deux variations à zéro. Deuxièmement, toujours dans la pratique, les coûts des transactions ne sont pas nuls. L'existence de frais de courtage oblige les émetteurs à réduire la fréquence de leurs interventions sur

le marché pour assurer le réajustement et le rééquilibrage de leur portefeuille et par conséquence l'élimination instantanée du risque ne tient plus. Et enfin, l'hypothèse de la liquidité des marchés des options et des sous-jacents n'est pas toujours assurée. Plus précisément, l'émetteur de l'option n'est pas sûr que ces ordres de ventes soient toujours avalés par le marché.

Black-Scholes proposent que pour un processus gaussien en temps continu, il existe une stratégie de couverture "parfaite", en ce sens que le risque associé à l'émission d'une option est strictement nul. Malheureusement, cette stratégie de couverture n'a pas de justificatif d'application sur des marchés où les fluctuations de l'actif sous-jacent sont non gaussiennes. La notion de risque nul est irréaliste. Cependant, une couverture optimale à risque minimal existe. En d'autres termes, un investisseur rationnel cherche à minimiser son risque, c'est à dire, l'émetteur d'une option détermine la stratégie de couverture qui lui permet de réduire le risque de sa position, d'où la notion de risque minimal.

Le reste de ce chapitre est consacré à la recherche d'une stratégie de couverture optimale en faisant appel aux mesures de risque, fondées sur les fonctions d'utilité et déterminées au premier chapitre de ce travail. En réalité, nous allons comparer la stratégie de couverture déduite de la fonction d'utilité avec le Δ de Black-Scholes et la stratégie de couverture quadratique.

4.3 Le cadre général

4.3.1 Bilan financier global

Soient deux actifs : l'actif X est un actif risqué (le sous-jacent) et un actif sans risque Y sous forme monétaire B investi au taux d'intérêt r . En raisonnant en temps discret, la valeur du portefeuille à l'instant k est :

$$W_k = \phi_k x_k + B_k, \tag{4.3.1}$$

où :

$$k = 1 \dots N$$

W_k : la valeur du portefeuille à l'instant k ;
 N : le nombre de période(s) envisagée sur l'horizon T d'investissement ;
 ϕ_k : le nombre de l'actifs risqués à l'instant k ;
 x_k : le cours de l'actif risqué à l'instant k ;
 B_k : montant investi en actif sans risque à l'instant k ;

La variation du portefeuille se fait via l'évaluation favorable ou défavorable de l'actif risqué X et aussi via le taux d'intérêt , qui affecte la partie investie sous forme monétaire B . La variation, entre deux instants successifs, du portefeuille est donc :

$$W_{k+1} - W_k = (\phi_{k+1}x_{k+1} - \phi_kx_k) + (B_{k+1} - B_k). \quad (4.3.2)$$

De plus, la variation de la partie monétaire, entre deux instants successifs, est égale à la rémunération au taux d'intérêt r ($B_k r \tau$), de laquelle une partie sert à financier la quantité nouvelle de l'actif risqué détenu dans le portefeuille, soit :

$$B_{k+1} - B_k = B_k r \tau - x_{k+1}(\phi_{k+1} - \phi_k) \quad (4.3.3)$$

avec τ est l'intervalle de temps séparant deux transactions consécutives.

En remplaçant (4.3.3) dans (4.3.2), on obtient :

$$W_{k+1} - W_k = \phi_k (x_{k+1} - x_k) + B_k r \tau. \quad (4.3.4)$$

On peut facilement exprimer la valeur du portefeuille à l'instant N en utilisant la suite récurrente (4.3.3) et (4.3.4)⁴

$$B_N = (1 + r\tau)^N B_0 + \sum_{k=0}^N x_k (\phi_k - \phi_{k-1}) (1 + r\tau)^{N-k} \quad (4.3.5)$$

et :

$$W_N = (1 + r\tau)^N W_0 + \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k - r\tau x_k) \phi_k (1 + r\tau)^{N-k-1}, \quad (4.3.6)$$

avec W_0 est le fond initial investi.

4. cf. Jean-Philippe Bouchaud et Marc Potters (1997), page (120)

4.3.2 Portefeuille d'options

Définition 4.3.1 Une option est un produit dérivé qui donne le droit (et non l'obligation) d'acheter (option d'achat, ou call) ou de vendre (option de vente, ou put) une quantité donnée d'un actif financier (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, etc.), appelé actif sous-jacent X à un prix précisé à l'avance (prix d'exercice x_s), à une date d'échéance donnée (option européenne) ou même avant cette date donnée (option américaine).

Le *payoff* d'une option d'achat est le max entre zéro et le flux engendré par un exercice immédiat de l'option, en d'autres termes

$$\max(0, x_N - x_s)$$

Il est clair que le risque couru par le vendeur d'un call est théoriquement illimité et associé à un gain limité au prix de l'option *prime*⁵. C'est à dire si le prix du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice $x_N > x_s$, donc l'option sera exercée dans ce cas et l'émetteur de l'option doit acheter le sous-jacent au prix de marché et le vendre au prix d'exercice x_s . Donc, pour minimiser le risque, un émetteur d'un call doit se couvrir en achetant ϕ actifs sous-jacent.

On suppose dans la suite de cette thèse que l'investisseur choisit de se couvrir. Dans ce cas, le bilan financier global entre t et $T = N\tau$ ⁶ :

$$W_N = (1+r\tau)^N(W_0+C) - \max(x_N - x_s, 0) + \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k - r\tau x_k) \phi_k (1+r\tau)^{N-k-1}. \quad (4.3.7)$$

Ce qui permet de déterminer la variation totale du portefeuille entre $t = 0$ et $t = T$:

$$\Delta W = (1+r\tau)^N C - \max(x_N - x_s, 0) + \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k - r\tau x_k) \phi_k (1+r\tau)^{N-k-1}. \quad (4.3.8)$$

5. L'acheteur d'un call perd la prime de l'option, dans le cas échéant, et associe un profit illimité dans le cas contraire

6. On ajoute tout simplement

$$C(1+r\tau)^N - \max(x_N - x_s, 0)$$

à l'équation (4.3.6)

Il est utile de remarquer qu'on a supposé que le taux d'intérêt est constant. En réalité cette hypothèse n'est pas toujours vraie. Dans le cas contraire, la généralisation de la formule (4.3.8) au cas où r dépend de temps s'écrit :

$$\Delta W = \prod_{k=0}^{N-1} (1+r_k\tau)^N C - \max(x_N - K, 0) + \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k - r_k\tau x_k) \phi_k \prod_{l=k+1}^{N-1} (1+r_l\tau). \quad (4.3.9)$$

On peut interpréter la formule (4.3.8) de la manière suivante. L'émetteur de l'option reçoit à l'instant $t = 0$ la prime de l'option vue à la date $t = T$, c'est à dire $(1+r\tau)^N C$. Le deuxième terme de l'équation représente le *payoff* de l'option qui dépend uniquement de cours du sous-jacent à l'échéance et du prix d'exercice. Plus précisément, si le prix de l'actif sous-jacent est supérieur au prix d'exercice, le deuxième terme présente une perte de $(x_N - x_s)$. Une partie de cette dernière sera financier par la prime de l'option. Et en fin, le dernier terme de la formule peut être interpréter comme suit : $\sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \phi_k (1+r\tau)^{N-k-1}$ représente le gain ou la perte dû aux variations du cours de sous-jacent et du nombre d'actifs tenus sur chaque sous périodes $k = 1 \dots (N-1)$ et $\sum_{k=0}^{N-1} (-r\tau x_k) \phi_k (1+r\tau)^{N-k-1}$ représente le manque à gagner si on place les ϕ_k au taux sans risque.

4.3.3 Les hypothèses de base

Toujours, dans la même démarche que Bouchaud et Potters (1997-2002), on émet les hypothèses suivantes :

- Les dividendes sont nuls ;
- Les frais de transactions sont supposés payés de manière exogène, c'est à dire qu'ils ne sont pas intégrés dans le bilan financier globale ;
- Le cours de l'actif sous-jacent suit une distribution arbitraire ;
- La volatilité de l'actif sous-jacent et le taux d'intérêt sont constants ;
- Les accroissements des cours de sous-jacent sont indépendants mais pas stationnaires :

$$\langle \delta x_i \delta x_j \rangle = \langle \delta x_i^2 \rangle \delta_{i,j} \quad (4.3.10)$$

où $\delta_{i,j}$ est le delta de Kroeneker : $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$, 0 sinon ;

- Les options sont de type européenne c'est à dire qu'elles ne peuvent être exercées qu'à une date précise : leur échéance ;
- La stratégie de couverture ϕ_i est indépendante de l'accroissement de sous-jacent δx_i puisque la stratégie ϕ_i étant déterminée avant l'occurrence de la variation aléatoire de δx_i . En d'autre terme :

$$\langle \phi_i^p \delta x_i^q \rangle = \langle \phi_i^p \rangle \langle \delta x_i^q \rangle \quad (4.3.11)$$

- On n'impose aucune restriction sur la forme de la distribution de l'actif sous-jacent ;
- On suppose que l'excès de rentabilité est nul en moyenne $\langle \delta x_i \rangle = 0$. Cette hypothèse trouve sa justification dans le fait que l'effet de les valeurs moyenne de ϕ_i est généralement faible par rapport à l'amplitude des fluctuations et surtout dans le cas où les intervalles de temps pris entre x_i et x_{i+1} sont assez réduits ou encore pour les options de courtes maturité.

L'objectif du reste de ce chapitre est de déterminer une stratégie de couverture qui minimise le risque. La stratégie de couverture de Black-Scholes, ou plus précisément le delta, qui annule le risque est loin de la réalité. On désigne par la stratégie de couverture la quantité nécessaire ϕ d'actifs sous-jacents à détenir. Pour atteindre cet objectif, on va étudier dans un premier temps la minimisation de la variance en suivant les mêmes raisonnements que Bouchaud-Sornette-Potters (1997, 2002), dans un second temps la minimisation de moments d'ordre quatre ou plus précisément la minimisation "quartique". Cette approche, d'après nos connaissances, est élaborée pour la première fois par Bouchaud et Selmi (2002). Et dans un troisième temps, nous allons utiliser la mesure du risque déduite par l'approche de l'utilité espérée plus haute afin de déduire une stratégie de couverture qui tient compte de "la psychologie"⁷ de l'investisseur. Dans un premier temps, nous allons étudier le cas d'une couverture statique et dans un deuxième temps le cas d'une couverture dynamique.

7. Les indicateurs subjectifs sont liés en réalité à l'allure de la fonction d'utilité et plus concrètement à la fonction d'aversion au risque de l'investisseur.

4.4 Stratégie de couverture statique

Discutant tout d'abord le cas simple, où on prend $N = 1$ et le taux d'intérêt est égale à zéro $r = 0$ ⁸. Dans ce cas particulier, l'émetteur de l'option fixe sa stratégie de couverture, *couverture statique*, une fois pour toute au moment de l'émission c'est à dire à l'instant $t = 0$. Ce cas correspond bien à la situation où les frais de transactions sont très élevés qu'il est très défavorable de modifier sa position à tout moment avant l'échéance ou bien dans le cas où les options se caractérisent par une courte maturité. Le dernier terme de l'équation (4.3.8) sera égal :

$$\sum_{i=0}^{N-1} \phi_i \delta x_i = \phi \delta x_N. \quad (4.4.1)$$

Ce qui permet de déduire le bilan financier global :

$$\Delta W = C - \max(x_N - x_s, 0) + \phi \delta x_N. \quad (4.4.2)$$

4.4.1 Les moments d'ordre partiel et les stratégies de couverture

Cette section sera consacrée à la présentation des différentes stratégies de couverture en minimisant les moments d'ordre partiel. Les moments d'ordre pair quantifient des risques d'autant plus grands que l'ordre de moment est élevé, tandis que les moments d'ordre impair caractérisent la dissymétrie entre les risques positifs et les risque négatifs de la distribution étudiée. Pour cela nous ne considérons dans l'approche de la minimisation du risque que les moments pairs. Nous détaillerons cette idée dans les deux sous-sections suivantes : le cas où le nombre de moments est égal à deux plus précisément "l'approche quadratique" et le cas où le nombre de moments est égal à quatre plus précisément l'approche "quartique".

4.4.1.1 La minimisation de moment d'ordre deux : la variance

La variance comme une mesure du risque a fait l'objet de plusieurs travaux à l'origine de ce travail, comme nous l'avons signalé plus haut, *Markowitz*(1952).

8. Bouchaud et Potters ont montré que l'effet de taux d'intérêt est négligeable dans le cas où les options sont caractérisées par des courtes maturités

Cette mesure est définie de la manière suivante :⁹ :

$$\mathcal{R}_2 = \langle (\Delta W - \langle \Delta W \rangle)^2 \rangle \quad (4.4.3)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} (\Delta W - \langle \Delta W \rangle)^2 d\Delta W. \quad (4.4.4)$$

Ce qui revient à :

$$\mathcal{R}_2 = \langle \Delta W^2 \rangle - \langle \Delta W \rangle^2. \quad (4.4.5)$$

La variance de la variation du portefeuille ou plus précisément le risque égale à :

$$\mathcal{R}_2 = \langle \delta x_N^2 \rangle \phi^2 - 2 \langle \delta x_N \max(x_N - x_s, 0) \rangle \phi + \mathcal{R}_0^2, \quad (4.4.6)$$

où \mathcal{R}_0^2 est le *risque intrinsèque*, associé à l'émission de l'option sans couverture c'est à dire $\phi = 0$:

$$\mathcal{R}_{2,0} = \langle \max(x_N - x_s, 0)^2 \rangle - \langle \max(x_N - x_s, 0) \rangle^2. \quad (4.4.7)$$

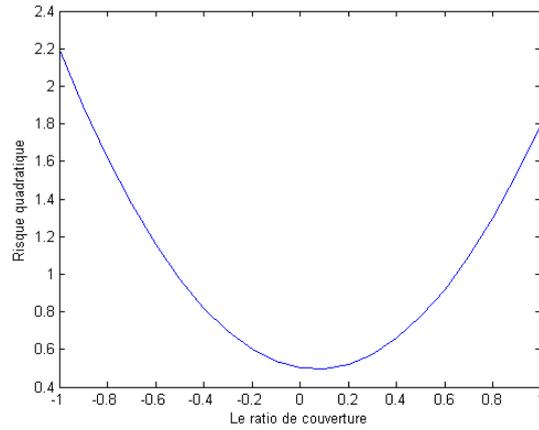


Figure 5.1 – Risque quadratique en fonction de stratégie de couverture ϕ dans le cas simple où cette stratégie est fixé dans le temps. \mathcal{R} est minimal pour une valeur bien déterminée de ϕ .

9. Il est important de préciser que l'espérance mathématique $\langle \cdot \rangle$ est calculée sur la base de la densité subjective de x_N et non sur la base de la densité neutre au risque

La stratégie de couverture qui minimise le risque, selon Bouchaud et Potters (1997, 2000, 2002), est solution de :

$$\frac{d\mathcal{R}^2}{d\phi} \Big|_{\phi=\phi^*} = 0 \quad (4.4.8)$$

Ce qui donne :¹⁰ :

$$\phi^* = \frac{\int_{x_s} (x - x_s)(x - x_0) f(x, N | x_0, 0) dx}{\int_{\mathbb{R}} (\delta x^2) f(x, N | x_0, 0) dx}. \quad (4.4.9)$$

Dans le cas particulier où l'actif sous-jacent suit une distribution gaussienne de la forme :

$$f(x, N | x_0, 0) = \frac{1}{\sigma x_0 \sqrt{2\pi T}} \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2 x_0^2 T}\right). \quad (4.4.10)$$

En remplaçant l'expression de $f(x, N | x_0, 0)$ dans l'équation (4.4.9), une simple intégration par partie, nous permet de déterminer le ratio de couverture qui n'est rien autre que la probabilité calculée à l'instant $t = 0$ que l'option soit exercée :

$$\mathcal{P} = \int_K f(x, N | x_0, 0) dx. \quad (4.4.11)$$

Si l'actif sous-jacent suit une distribution exponentielle négative, centrée au prix initiale x_0 , de la forme :

$$f(x, N | x_0, 0) = \frac{1}{\sigma x_0 \sqrt{2T}} \exp\left(-\frac{|(x - x_0)| \sqrt{2}}{\sigma x_0 \sqrt{T}}\right). \quad (4.4.12)$$

La stratégie optimale qui minimise la variance égale :

$$\phi^* = 1I_{x_0 \geq x_s} - \left(\frac{1}{2} + \frac{x_0 - x_s}{2x_0 \sigma \sqrt{T}}\right) \exp\left(-\frac{|x_0 - x_s| \sqrt{2}}{\sigma x_0 \sqrt{T}}\right). \quad (4.4.13)$$

Il est intéressant de remarquer que si $x_s \gg x_0$ (respectivement $x_s \ll x_0$), $\phi^* \rightarrow 0$ (respectivement $\phi^* \rightarrow 1$) et dans le cas où $x_s = x_0$ nous avons bien $\phi^* = \frac{1}{2}$.

10. Nous remarquons bien que cette stratégie de ouverture ne dépend pas de la prime de l'option. Cette indépendance est dû au fait à :

$$\Delta W - \langle \Delta W \rangle = \langle \max(x_N - x_s, 0) \rangle - \max(x_N - x_s, 0) + \delta x_N - \langle \delta x_N \rangle$$

4.4.1.2 La minimisation de moments d'ordre quatre

Dans ce paragraphe, nous allons présenter l'approche *quartique* où la stratégie de couverture est déterminée par la minimisation du moment d'ordre quatre. Le moment d'ordre quatre de la variation globale de l'erreur de couverture est égal à :

$$\mathcal{R}_4 = \left\langle (\Delta W - \langle \Delta W \rangle)^4 \right\rangle. \quad (4.4.14)$$

Par souci de simplification, nous supposons :

$$M_N = \max(x_N - x_s, 0) \quad (4.4.15)$$

$$\begin{aligned} \mu_{p,q} &= \langle (\delta x_N)^q M_N^p \rangle \\ &= \int_{x_s}^{+\infty} (x - x_s)^p (x - x_0)^q f(x, N|x_0, 0) dx \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

$$m_q = \langle (\delta x_N)^q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_0)^q f(x, N|x_0, 0) dx. \quad (4.4.17)$$

Un calcul très simple mais long donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_4 &= \left\langle (\delta x_N)^4 \right\rangle \phi^4 + 4 \left[\left\langle (\delta x_N)^3 \right\rangle \langle M_N \rangle - \left\langle (\delta x_N)^3 M_N \right\rangle \right] \phi^3 \\ &\quad + 6 \left[-2 \langle M_N \rangle \left\langle (\delta x_N)^2 M_N \right\rangle + \left\langle (\delta x_N)^2 M_N^2 \right\rangle + \langle M_N^2 \rangle \left\langle (\delta x_N)^2 \right\rangle \right] \phi^2 \\ &\quad + 4 \left[-3 \langle M_N^2 \rangle \langle \delta x_N M_N \rangle - \langle \delta x_N M_N^3 \rangle + 3 \langle M_N \rangle \langle \delta x_N M_N^2 \rangle \right] \phi \\ &\quad + \mathcal{R}_{4,0} \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

$$= \alpha_4 \phi^4 + \alpha_3 \phi^3 + \alpha_2 \phi^2 + \alpha_1 \phi + \mathcal{R}_{4,0} \quad (4.4.19)$$

où $\mathcal{R}_{4,0}$ est le risque intrinsèque défini par ($\phi = 0$) :

$$\mathcal{R}_{4,0} = \left\langle (M_N - \langle M_N \rangle)^4 \right\rangle \quad (4.4.20)$$

et

$$\begin{cases} \alpha_4 = m_4 \\ \alpha_3 = 4(m_3 \mu_{1,0} - \mu_{1,3}) \\ \alpha_2 = 6(-2\mu_{1,0}\mu_{1,2} + \mu_{2,2} + m_2 \mu_{2,0}) \\ \alpha_1 = 4(-3\mu_{2,0}\mu_{1,1} - \mu_{3,2} - 3\mu_{2,0}\mu_{1,1}). \end{cases}$$

Il est important de remarquer, d'après l'équation (4.4.18), que le risque quartique est un polynôme de degré quatre. Ces coefficients sont des constantes notamment le coefficient de plus haut degré α_4 qui est positif, ce qui prouve bien l'existence d'un minimum.

Le ratio de couverture optimal ϕ_4^* qui minimise le risque mesuré par le moment d'ordre quatre vérifie ces deux conditions :

$$\begin{cases} \frac{\partial R_4}{\partial \phi} = 0 \\ \frac{\partial^2 R_4}{\partial \phi^2} \geq 0 \mid_{\phi=\phi^*} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial R_4}{\partial \phi} = 4\alpha_4\phi^3 + 3\alpha_3\phi^2 + 2\alpha_2\phi + \alpha_1 = 0. \quad (4.4.21)$$

On remarque bien que le ratio de couverture optimal est solution d'une équation de troisième degré. En utilisant *la formule de Cardan*¹¹

$$\phi_4^* = \frac{1}{12\alpha_4} \sqrt[3]{\Lambda + \Theta} - \frac{1}{4\alpha_4} \left(\frac{\Psi}{\sqrt[3]{\Lambda + \Theta}} \right) - \frac{1}{4} \frac{\alpha_3}{\alpha_4}, \quad (4.4.22)$$

avec :

$$\begin{cases} \Lambda = 108\alpha_2\alpha_3\alpha_4 - 216\alpha_1\alpha_4^2 - 27\alpha_3^3 \\ \Theta = 12\sqrt{3}\alpha_4\sqrt{32\alpha_2^3\alpha_4 - 9\alpha_2^2\alpha_3^2 - 108\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_1 + 108\alpha_1^2\alpha_4^2 + 27\alpha_1\alpha_3^3} \\ \Psi = 8\alpha_2\alpha_4 - 3\alpha_3^2 \end{cases}$$

Il est évident de remarquer que cette stratégie de couverture optimale, qui est une solution explicite exacte, dépend uniquement de la distribution de l'actif sous-jacent à l'échéance et des caractéristiques de l'option considérée. Dans le premier cas où

11. Cette méthode a été élaborée par des algébristes italiens au *XVI^e siècle*. Elle consiste à résoudre la formule réduite suivante de l'équation de troisième degré de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$:

$$z^3 + pz + q = 0$$

avec

$$x = z - \frac{b}{3a}$$

l'option est dans la monnaie et l'actif sous-jacent suit une distribution symétrique, $\phi_4^* = 1/2$, puisque les coefficients $\mu_{p,q}$ et m_q se compensent mutuellement (par exemple $\mu_{p,q} = \mu_{q,p} = \frac{1}{2}m_{p+q}$). Dans le deuxième cas où l'option est profondément en dehors de la monnaie c-à-d $x_s \gg x_0$, $\phi_4^* \rightarrow 0$ puisque les coefficients $\alpha_{i,i=1,2,3} \rightarrow 0$ car $\mu_{p,q} \rightarrow 0$. L'émetteur est sûr que l'option finira en dehors de la monnaie, donc il ne réagit pas. Et enfin, si l'option est profondément dans la monnaie, c-à-d $x_s \leq x_0$, donc $\phi_4^* \rightarrow 1$, l'émetteur est certain que l'option finira dans la monnaie, donc il est dans son intérêt d'acheter le sous-jacent pour ne pas le payer trop cher.

4.4.2 Les stratégies de couverture et les fonctions d'utilités

L'objectif de cette sous-section est de déterminer une stratégie de couverture qui tient compte de la psychologie de l'investisseur. Plus précisément, un ratio de couverture qui dépend de la fonction d'aversion au risque de l'investisseur. Nous avons déterminé, dans le premier chapitre de ce travail, des mesures de risque en faisant appel aux fonctions d'utilité. En d'autre terme, nous avons déterminé théoriquement des mesures de risque fondées sur les fonctions d'utilité de l'investisseur et qui tiennent compte des moments d'ordre trois pour étudier le phénomène de kurtosis et le moment d'ordre quatre qui donne une idée sur le phénomène leptokurtique. Nous avons montré que ces mesures de risque dépendent de la fonction d'aversion au risque.

La structure de cette sous-section est comme suit. Dans un premier temps, nous allons déterminer le ratio de couverture optimal si les préférences de l'investisseur sont représentées par une fonction d'utilité exponentielle négative définie par (1.4.12). Après, nous déduisons le ratio de couverture optimal si les préférences de l'investisseur sont représentées par une fonction d'utilité isoélastique définie par (1.4.14)

4.4.2.1 Le ratio de couverture optimal déduit de la fonction d'utilité exponentielle négative

Nous avons montré dans le premier chapitre de cette thèse que lorsque les préférences de l'investisseur sont représentées par une fonction d'utilité exponen-

tielle négative définie par (1.4.12), la mesure du risque est égale :

$$\mathcal{R}_{exp}(\Delta W) = \sigma^2 - \frac{1}{3}\lambda_3\beta + \frac{1}{12}\lambda_4\beta^2, \quad (4.4.23)$$

où β est l'aversion au risque¹². Un calcul simple mais trop long montre que le ratio de couverture est une solution de l'équation de troisième degré suivante :

$$A_1\phi_\beta^3 + A_2\phi_\beta^2 + A_3\phi_\beta + A_4 = 0, \quad (4.4.24)$$

avec

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{3}\beta^2 m_4 \\ A_2 = \beta^2 (\mu_{1,0}m_3 - \mu_{1,3}) - \beta m_3 \\ A_3 = \beta^2 (\mu_{1,0}^2 m_2 + \mu_{2,2} - 2\mu_{1,0}\mu_{1,2}) - 2\beta (\mu_{1,0}m_2 - \mu_{1,2}) + 2m_2 \\ A_4 = \beta^2 (\mu_{1,0}\mu_{2,1} - \frac{1}{3}\mu_{3,1} - \mu_{1,0}^2\mu_{1,1}) - \beta (\mu_{2,1} - 2\mu_{1,1}\mu_{1,0}) - 2\mu_{1,1} \end{cases}$$

On remarque que les coefficients de l'équation (4.4.24) dépendent uniquement de l'aversion au risque et de la distribution de l'actif sous-jacent. Le problème de la minimisation défini par (1.4.13) admet un minimum puisque A_1 est positif. Il est important de noter que lorsque $\beta \rightarrow 0$, $A_1 = A_2 \rightarrow 0$, $A_3 \rightarrow m_2$ et $A_4 \rightarrow -2\mu_{1,1}$, la stratégie de couverture optimale est celle qui minimise la variance de Bouchaud et Potters (1997, 2000). Une application de la formule de Cardan à l'équation (4.4.24) nous donne :

$$\phi_\beta^* = \frac{1}{6A_1} \sqrt[3]{\Lambda + \Theta} - \frac{2}{3A_1} \left(\frac{\Psi}{\sqrt[3]{\Lambda + \Theta}} \right) - \frac{1}{3} \frac{A_2}{A_1}, \quad (4.4.25)$$

avec :

$$\begin{cases} \Lambda = 36A_3A_2A_1 - 108A_4A_1^2 - 8A_2^3 \\ \Theta = 12\sqrt{3}A_1\sqrt{4A_3^3A_1 - A_3^2A_2^2 - 18A_4A_3A_2A_1 + 27A_4^2A_1^2 + 4A_4A_2^3} \\ \Psi = 3A_3A_1 - A_2^2 \end{cases}$$

On voit très bien que cette stratégie de couverture est compliquée et difficile à interpréter mais a une solution explicite exacte. Pour pallier cette difficulté et afin d'interpréter ce ratio de couverture, nous supposons que l'actif sous-jacent suit une

12. Il est clair que la mesure du risque qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative est une combinaison linéaire des moments d'ordre deux, trois et quatre.

distribution exponentielle négative de la forme (4.4.12).

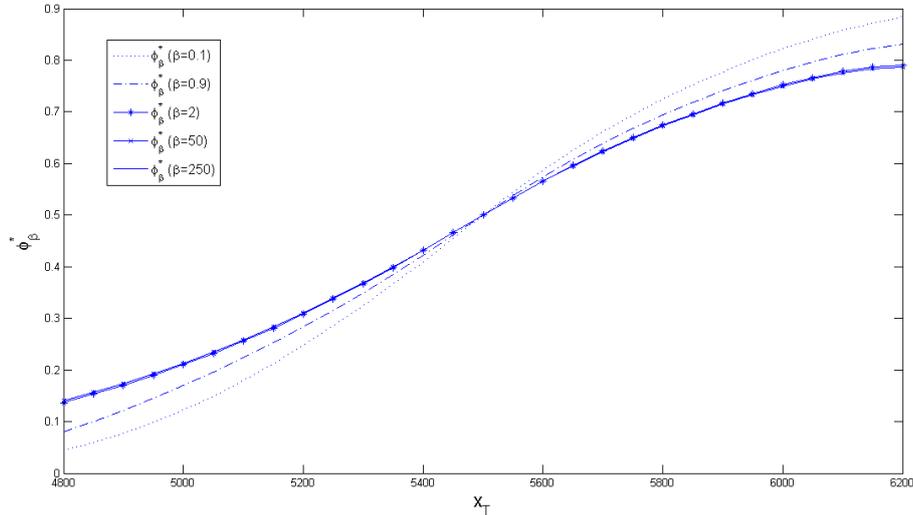


Figure 5.2 – Les stratégies de couverture qui maximisent la fonction d'utilité exponentielle négative. L'option émise est de maturité 20 jours et de prix d'exercice 5500. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 10%. Le choix de β est basé sur nos résultats empiriques trouvés au chapitre 3.

La Figure¹³ 5.2 illustrant l'évolution de la stratégie de couverture optimale qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative en fonction du cours de l'actif sous-jacent pour des valeurs de β ¹⁴, indique que pour une option à la monnaie et une distribution du sous-jacent symétrique, une distribution exponentielle négative, le ratio de couverture $\phi_\beta^* = \frac{1}{2}$. Il est important de noter que si le prix d'exercice est supérieur au cours de l'actif sous-jacent (option profondément en dehors de la monnaie), le ratio de couverture tend vers zéro. Et dans le cas contraire, si le prix d'exercice est inférieur au cours de l'actif sous-jacent (option profondément dans la monnaie), le ratio de couverture tend vers 1. En d'autre terme le ratio de couverture

13. Ce prix d'exercice correspond au cours de l'actif sous-jacent *CAC40* pour la date 10/01/2007, où nous avons trouvé que la valeur de l'aversion au risque est entre [-300 ;300].

14. Nous n'avons pas pris de valeurs négatives de β puisque tous les β dans l'équation (4.5.43) ont des exposants pairs

varie entre 0 pour les options profondément en dehors de la monnaie et 1 pour les options profondément dans la monnaie, comme il se doit. Nous remarquons aussi que cette stratégie de couverture est inférieure à ϕ_2^* pour une option dans la monnaie et elle est supérieure à ϕ_2^* pour une option en dehors de la monnaie. En effet, la mesure du risque qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative est une combinaison linéaire de la variance, skewness et kurtosis. Les larges fluctuations sont captées par la kurtosis et ignorées par la variance. Nous notons que le ratio de couverture est moins sensible au choix de β lorsque ce dernier est supérieur à 1. En d'autre terme, si l'aversion au risque est largement supérieur à 1 ($\beta > 1$), l'émetteur de l'option cherche en premier lieu à minimiser les effets des grandes fluctuations mesurées par le moment d'ordre quatre.

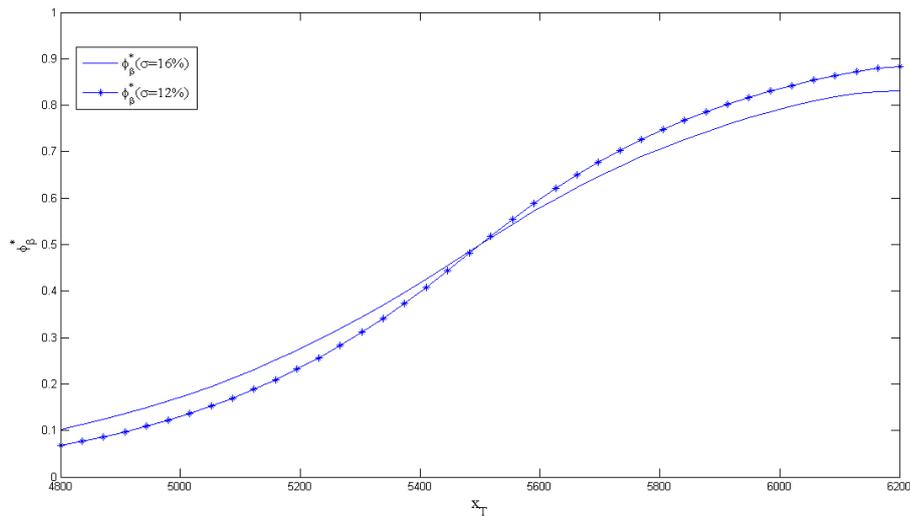


Figure 5.3 – Les stratégies de couverture qui maximisent la fonction d'utilité exponentielle négative. L'option émise est de maturité 20 jours et de prix d'exercice 5500. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 12% et 16%.

La Figure 5.3 montre que lorsque la volatilité de l'actif sous-jacent augmente, toute chose égale par ailleurs, le ratio de couverture qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative augmente pour les options en dehors de la monnaie et

diminue pour les options dans la monnaie. Cette stratégie de couverture garde les mêmes propriétés que celle d'un ratio de couverture. De même la Figure 5.4 illustrant la sensibilité de la stratégie de couverture par rapport à la maturité montre que lorsque la maturité de l'actif sous-jacent augmente, toute chose égale par ailleurs, le ratio de couverture augmente pour les options en dehors de la monnaie et diminue pour les options dans la monnaie.

Il reste maintenant à comparer cette stratégie de couverture aux stratégies en delta de Black et Scholes, à la stratégie qui minimise la variance du bilan financier et enfin à la stratégie qui minimise le moment d'ordre quatre du bilan financier.

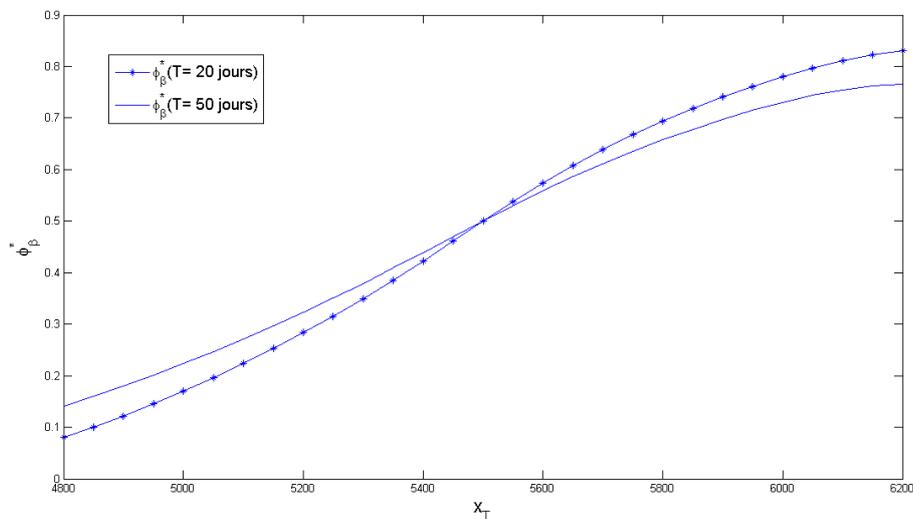


Figure 5.4 – Les stratégies de couverture qui maximisent la fonction d'utilité exponentielle négative. L'option émise est de prix d'exercice 5500. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 12% et pour deux exemples de maturités $T = 20 \text{ jours}$ et $T = 50 \text{ jours}$.

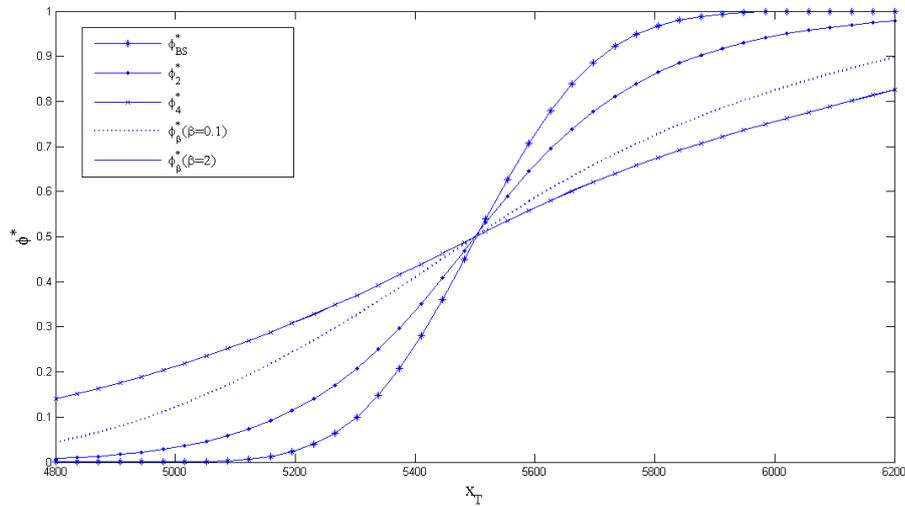


Figure 5.5 – Les stratégies de couverture optimales en fonction de cours du sous-jacent : ϕ_{BS}^* le delta de Black-Scholes, ϕ_2^* minimise la variance de bilan financier, ϕ_4^* minimise le moment d'ordre quatre du bilan financier et ϕ_β^* qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative. L'option émise est de maturité 20 jours et de prix d'exercice 5500. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 12%.

La Figure 5.5 qui trace l'évolution de quatre stratégies de couverture optimales citées auparavant montre que pour une option dans la monnaie, la stratégie de couverture en Δ de Black-Scholes est supérieure à ϕ_2^* , à ϕ_4^* et à ϕ_β^* et pour une option en dehors de la monnaie, la stratégie de couverture ϕ_4^* est supérieure à Δ , à ϕ_2^* et à ϕ_β^* . Ceci peut être expliqué par le fait que si l'actif sous-jacent subit une forte fluctuation, soit à la hausse soit à la baisse, l'investisseur cherche en priorité à minimiser les effets de ces fluctuations qui sont bien captées par le moment d'ordre quatre. La Figure 5.5 montre aussi que lorsque $\beta > 1$, la stratégie de couverture qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative tend vers la stratégie de couverture qui minimise le moment d'ordre quatre.

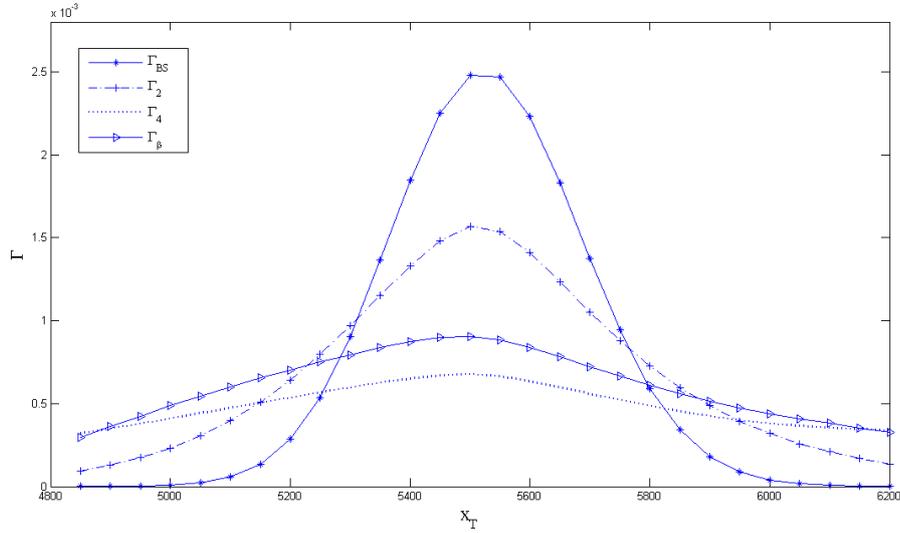


Figure 5.6 – Les différentes Gamma (Γ) correspondantes aux quatre stratégies optimales : ϕ_{BS}^* , ϕ_2^* , ϕ_4^* et ϕ_β^* . Γ est la dérivée première de ϕ^* par rapport au sous-jacent

La Figure 5.6 illustrant les différentes Γ correspondantes aux quatre stratégies optimales : ϕ_{BS}^* , ϕ_2^* , ϕ_4^* et ϕ_β^* indique que $\Gamma_{BS} > \Gamma_2 > \Gamma_\beta \simeq \Gamma_4$ pour une option à la monnaie. En d'autre terme, les Γ_4 et Γ_β varient lentement par rapport aux autres Gamma. Pour un émetteur d'option d'achat qui choisit une stratégie de couverture qui minimise le moment d'ordre quatre ou une stratégie qui maximise une fonction d'utilité exponentielle négative, les frais de transactions liés à ces interventions sont beaucoup moins élevés. En revanche, nous remarquons que $\Gamma_4 \simeq \Gamma_\beta < \Gamma_2 = \Gamma_{BS} = 0$ pour une option largement en dehors ou dans la monnaie mais ont des valeurs trop faibles.

4.4.2.2 Le ratio de couverture optimal déduit de la fonction d'utilité isoélastique

Si on suppose maintenant que les préférences de l'investisseur sont représentées par une fonction d'utilité isoélastique où *CRRA* défini par (1.4.14), la mesure du risque associée à cette fonction d'utilité est donnée par :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{iso(\gamma>0\&\gamma>1)}(\Delta W) = \sigma^2 - \frac{(1+\gamma)}{3} \langle \Delta W \rangle^{-1} \left(\lambda_3 - \frac{(2+\gamma)}{4} \lambda_4 \langle \Delta W \rangle^{-1} \right) \\ \mathcal{R}_{iso(\gamma=1)} = \sigma^2 - \frac{2}{3} \lambda_3 \langle \Delta W \rangle^{-1} + \frac{1}{2} \lambda_4 \langle \Delta W \rangle^{-2} \end{cases} \quad (4.4.26)$$

où γ est la fonction d'aversion relatif au risque. Un calcul simple montre que le ratio de couverture est une solution de l'équation de troisième degré suivante¹⁵ :

$$B_1 \phi_\gamma^3 + B_2 \phi_\gamma^2 + B_3 \phi_\gamma + B_4 = 0, \quad (4.4.27)$$

avec

$$\begin{cases} B_1 = 4m_4\Upsilon \\ B_2 = -3\Delta m_3 + 12\Upsilon\mu_{1,0}m_3 - 12\Upsilon\mu_{1,3} \\ B_3 = 2m_2 - 6\Delta m_2\mu_{1,0} + 6\Delta\mu_{1,2} + 12\Upsilon\mu_{1,0}^2 m_2 - 24\Upsilon\mu_{1,0}\mu_{1,2} + 12\Upsilon\mu_{2,2} \\ B_4 = -2\mu_{1,1} + 6\Delta\mu_{1,0}\mu_{1,1} - 3\Delta\mu_{2,1} - 12\Upsilon\mu_{1,0}^2\mu_{1,1} + 12\Upsilon\mu_{1,0}\mu_{2,1} - 4\mu_{3,1} \\ \Delta = \frac{1+\gamma}{3(C-\langle M_N \rangle)} \\ \Upsilon = \frac{(1+\gamma)(2+\gamma)}{12(C-\langle M_N \rangle)^2} \end{cases}$$

On remarque que les coefficients de l'équation (4.4.27) dépendent uniquement de l'aversion au risque, la distribution de l'actif sous-jacent et la prime de l'option à la différence des autres ratios de couvertures : ϕ_{BS}^* , ϕ_2^* , ϕ_4^* et ϕ_β^* . Le problème d'optimisation défini par (1.4.15) admet un minimum puisque B_1 est positif. La résolution de l'équation (4.4.27) montre que le ratio de couverture optimal qui maximise la fonction d'utilité isoélastique a pour expression analytique la suivante :

$$\phi_\gamma^* = \frac{1}{6B_1} \sqrt[3]{\Lambda + \Theta} - \frac{2}{3B_1} \left(\frac{\Psi}{\sqrt[3]{\Lambda + \Theta}} \right) - \frac{1}{3} \frac{B_2}{B_1} \quad (4.4.28)$$

15. Cette mesure du risque dépend de la prime de l'option C puisque $\langle \Delta W \rangle = C - \langle M_N \rangle$

avec :

$$\begin{cases} \Lambda = 36B_3B_2B_1 - 108B_4B_1^2 - 8B_2^3 \\ \Theta = 12\sqrt{3}B_1\sqrt{4B_3^3B_1 - B_3^2B_2^2 - 18B_4B_3B_2B_1 + 27B_4^2B_1^2 + 4B_4B_2^3} \\ \Psi = 3B_3B_1 - B_2^2 \end{cases}$$

Quoique compliqué et difficile à interpréter, le ratio de couverture optimal a une solution exacte. Pour pallier à cette difficulté et afin d'interpréter ce ratio optimal, nous supposons que l'actif sous-jacent suit une distribution exponentielle négative de la forme (4.4.12).

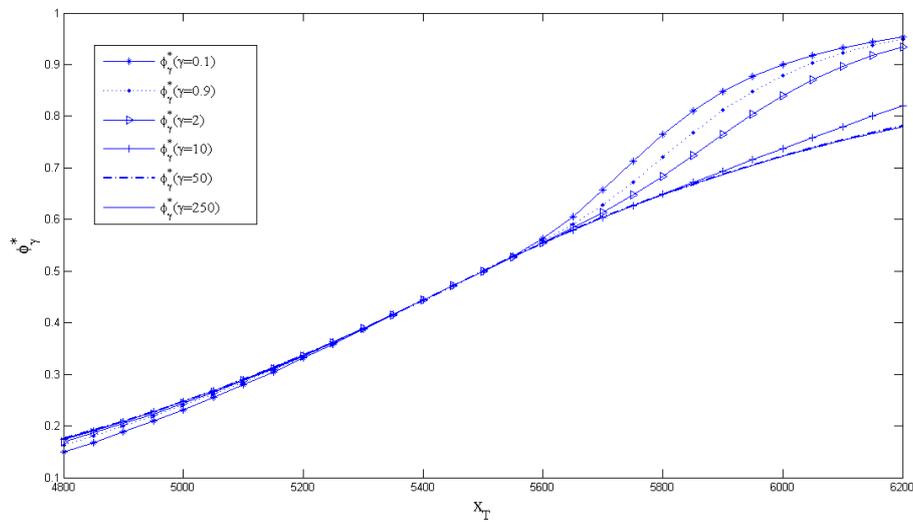


Figure 5.7 – Les stratégies de couverture qui maximisent la fonction d'utilité isoélastique. L'option émise est de maturité 20 jours, de prix d'exercice 5500 et de prime 55,36. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 10%. Le choix de γ est basé sur nos résultats empiriques trouvés au chapitre 3.

La Figure 5.7, illustrant l'évolution du ratio de couverture optimal qui maximise la fonction d'utilité isoélastique en fonction du cours de l'actif sous-jacent pour des valeurs de γ , indique que pour une option à la monnaie et une distribution du sous-jacent symétrique, le ratio de couverture $\phi_\gamma^* = \frac{1}{2}$, comme il se doit. Il est clair que si le prix d'exercice est supérieur au cours de l'actif sous-jacent (option profondément en dehors de la monnaie), le ratio de couverture tend vers zéro. Et dans le cas contraire, c'est-à-dire quand le prix d'exercice est inférieur au cours de l'actif sous-jacent (option profondément dans la monnaie), le ratio de couverture tend vers 1, comme il se doit. En effet, si le prix d'exercice est largement supérieur au cours de l'actif sous-jacent, l'émetteur de l'option est pratiquement sûr que l'option finira en dehors de la monnaie. Il est dans son intérêt, alors, de ne pas détenir le sous-jacent, donc $\phi_\gamma^* \rightarrow 0$. Par analogie, si le prix d'exercice est largement inférieur au cours de l'actif sous-jacent, l'émetteur de l'option est pratiquement sûr que l'option finira dans la monnaie, il est dans son intérêt d'avoir le sous-jacent, donc $\phi_\gamma^* \rightarrow 1$. En d'autre terme le ratio de couverture varie entre 0 pour les options profondément en dehors de la monnaie et 1 pour les options profondément dans la monnaie. Ce résultat est cohérent avec ceux de Black et Scholes (1973), Bouchaud et Potters (1997, 2000, 2002) et Bouchaud et Selmi (2003). Cette Figure montre aussi que si l'option est profondément en dehors de la monnaie (le prix d'exercice est supérieur au cours de l'actif sous-jacent), le ratio de couverture est moins sensible à l'aversion relative de risque γ . En d'autres termes, si le prix d'exercice est supérieur au cours de l'actif sous-jacent, l'émetteur de l'option est indifférent à son avis vis-à-vis du risque. En revanche, si le prix d'exercice est inférieur au cours de l'actif sous-jacent, le ratio de couverture diminue en fonction de l'aversion au risque de l'émetteur de l'option. Ceci peut s'expliquer par l'effet de la prime de l'option.

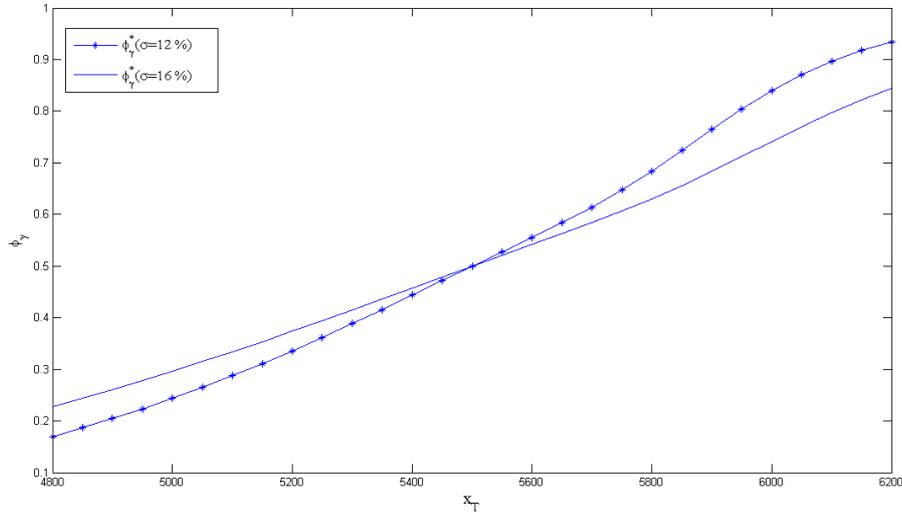


Figure 5.8 – Les stratégies de couverture qui maximisent la fonction d'utilité isoélastique. L'option émise est de maturité 20 jours, de prix d'exercice 5500, de prime 55,36. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 12% et 16%.

La Figure 5.8 montre que lorsque la volatilité de l'actif sous-jacent augmente, toutes choses égales par ailleurs, le ratio de couverture qui maximise la fonction d'utilité isoélastique augmente pour les options en dehors de la monnaie et diminue pour les options dans la monnaie. Cette stratégie de couverture a les mêmes propriétés que la célèbre stratégie de couverture en delta, la stratégie de couverture de Bouchaud et Potters (1997, 2000, 2002), la stratégie de couverture de Bouchaud et Selmi (2003) et la stratégie de couverture qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative.

La Figure 5.9 illustrant la sensibilité de la stratégie de couverture qui maximise la fonction d'utilité isoélastique par rapport à la maturité, toute chose égale par ailleurs, montre que lorsque la maturité de l'actif sous-jacent augmente, le ratio de couverture augmente pour les options en dehors de la monnaie et diminue pour les options dans la monnaie.

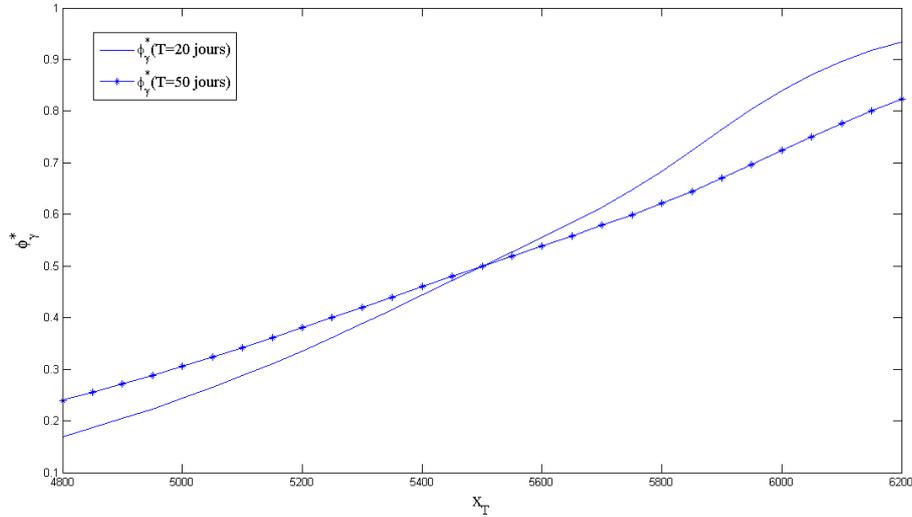


Figure 5.9 – Les stratégies de couverture qui maximisent la fonction d'utilité isoélastique. L'option émise est de maturité 20 jours, de prix d'exercice 5500 et de prime 55,36. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 12% et pour deux exemples de maturités $T = 20$ jours et $T = 50$ jours.

La Figure 5.10 qui trace l'évolution de cinq stratégies de couverture optimales : ϕ_{BS}^* le delta de Black-Scholes, ϕ_2^* minimise la variance du bilan financier, ϕ_4^* minimise le moment d'ordre quatre du bilan financier, ϕ_β^* qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative et ϕ_γ^* qui maximise la fonction d'utilité isoélastique, montre que pour une option à la monnaie, la stratégie de couverture en Δ de Black et Scholes est supérieure à ϕ_2^* , à ϕ_4^* , à ϕ_β^* et à ϕ_γ^* et pour une option en dehors de la monnaie, la stratégie de couverture ϕ_4^* est supérieure à Δ , à ϕ_2^* , à ϕ_γ^* et à ϕ_β^* . Ceci peut être expliqué par le fait que si l'actif sous-jacent subit une forte fluctuation à la hausse ou à la baisse, l'investisseur cherche en priorité à minimiser les effets de ces fluctuations qui sont bien captées par le moment d'ordre quatre. Il est important de noter que lorsque $\gamma \rightarrow +\infty$, le ratio de couverture $\phi_\gamma^* \rightarrow \phi_4^*$ et $\phi_\gamma^* \rightarrow \phi_\beta^*$.

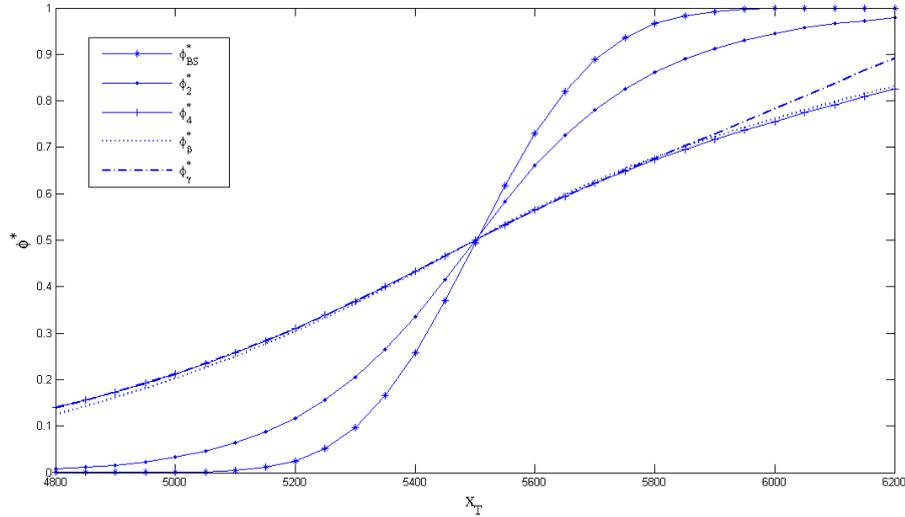


Figure 5.10 – Les stratégies de couverture optimales en fonction de cours du sous-jacent : ϕ_{BS}^* le delta de Black-Scholes, ϕ_2^* minimise la variance de bilan financier, ϕ_4^* minimise le moment d'ordre quatre du bilan financier, ϕ_β^* qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative et ϕ_γ^* qui maximise la fonction d'utilité isoélastique. L'option émise est de maturité 20 jours, de prix d'exercice 5500 et de prime 55,36. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative avec une volatilité de 12%.

La Figure 5.11 illustrant les différentes Γ correspondantes aux cinq stratégies de couverture optimales : ϕ_{BS}^* , ϕ_2^* , ϕ_4^* , ϕ_β^* et ϕ_γ^* indique que $\Gamma_{BS} > \Gamma_2 > \Gamma_\beta \simeq \Gamma_\gamma \simeq \Gamma_4$ pour une option à la monnaie. En d'autre terme, les Γ_4 , Γ_β et Γ_γ varient lentement par rapport aux autres Gamma. Pour un émetteur d'option d'achat qui choisit une stratégie de couverture qui minimise le moment d'ordre quatre ou une stratégie qui maximise une fonction d'utilité exponentielle négative ou encore une stratégie qui maximise la fonction d'utilité isoélastique, les frais de transactions liés à ces interventions sont beaucoup moins élevés. En revanche, nous remarquons aussi que $\Gamma_4 \simeq \Gamma_\gamma \simeq \Gamma_\beta < \Gamma_2 = \Gamma_{BS} = 0$ pour une option largement en dehors ou dans la monnaie mais ont des valeurs trop faibles.

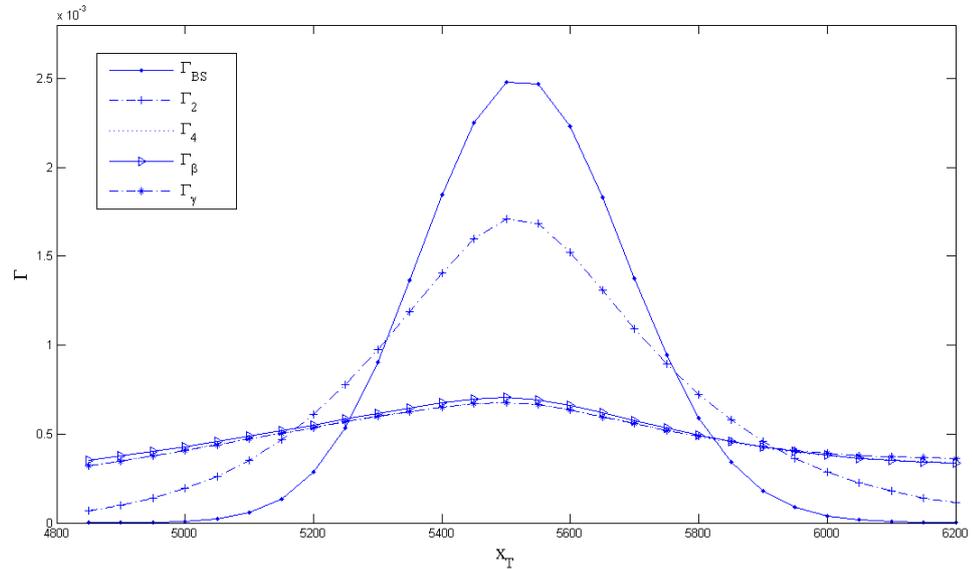


Figure 5.11 – Les différentes Gamma (Γ)correspondantes aux quatre stratégies optimales : ϕ_{BS}^* , ϕ_2^* , ϕ_4^* , ϕ_β^* et ϕ_γ^* . Γ est la dérivée première de ϕ^* par rapport au sous-jacent

L'objectif dans cette section était la recherche d'une stratégie de couverture statique dans un marché caractérisé par des fluctuations non gaussiennes. Nous avons déterminé dans un premier temps une stratégie de couverture qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative, caractérisée par une aversion absolue au risque et dans un deuxième temps une stratégie de couverture qui maximise la fonction d'utilité isoélastique caractérisée par une aversion au risque relatif. Nous avons montré que lorsque le paramètre de l'aversion au risque tend vers l'infini, le ratio de couverture déduit de la fonction d'utilité tend vers la stratégie qui minimise le moment d'ordre quatre. Nous avons démontré aussi que la stratégie de couverture via la maximisation de la fonction d'utilité, pour la fonction d'utilité exponentielle négative ou pour la fonction d'utilité isoélastique, est compliquée mais admet une solution explicite et exacte. Cependant, ces stratégies de couverture ne donnent pas de bons résultats dans le cadre où le marché est caractérisé par de grandes fluctuations. Dans la section suivante, nous allons chercher la stratégie de couverture dynamique où la stratégie de couverture dépend de l'instant t_k .

4.5 La stratégie de couverture dynamique et la stratégie de couverture statique translatée

Les stratégies de couverture statiques déterminées ci-dessus ramènent sûrement le risque de la variation du portefeuille entre l'instant $t = 0$ et l'échéance ($t = T$) à son minimum. Or, dans un marché caractérisé par de fortes fluctuations, notamment pendant la crise, la stratégie de couverture statique ou une seule intervention à l'instant initial, ne s'avère plus efficace. En d'autres termes, une stratégie de couverture statique minimise le risque à l'instant $t = 0$ et non pas à tout instant $t > 0$. Pour illustrer cette idée soit l'exemple suivant : une option profondément en dehors de la monnaie, implique un ratio de couverture nul. Si l'actif sous-jacent subit, brusquement, une forte fluctuation à la hausse à l'instant $t > 0$, l'émetteur de l'option doit réagir en achetant l'actif sous-jacent, sinon il risque d'acheter le sous-jacent à l'échéance trop cher. Donc, il paraît nécessaire que l'émetteur de l'option réajuste sa position tout le temps. Il existe deux possibilités afin de déterminer la stratégie de couverture dynamique :

- La première possibilité consiste à déterminer à chaque instant d'intervention $t = k\tau$ le ratio de couverture en minimisant le risque de la variation totale de son bilan financier sur la maturité résiduelle de l'option (c-à-d entre $t = k\tau$ et $t = T$). On parle de la stratégie de couverture statique translatée.
- La deuxième possibilité consiste à déterminer l'ensemble de stratégies de couverture par la minimisation du risque de sa position entre la date initiale et l'échéance de l'option.

4.5.1 La stratégie de couverture statique translatée

En réalité, la stratégie de couverture statique translatée est la stratégie de couverture statique mais dynamique au sens qu'elle est translatée dans le temps. En d'autre terme, l'émetteur d'une option (achat ou vente) réajuste, à chaque intervention, sa position comme il ne s'interviendrait plus jusqu'à l'échéance de l'option. Plus formellement, nous allons déterminer les stratégies de couverture ϕ_k^* solution

du problème d'optimisation suivant :

$$\min(\mathcal{R}_k)(\Delta W \Big|_{t=k\tau}^T) |_{\phi_k=\phi_k^*} \quad k = 0, \dots, N - 1. \quad (4.5.1)$$

La technique de cette stratégie est très simple. En effet, on translate la couverture optimale initiale dans le temps et on raisonne par analogie à une couverture statique. En d'autres termes, l'émetteur d'une option qui a opté par une seule intervention à l'instant initial, pense qu'il fallait réajuster une autre fois son portefeuille suite à une forte variation de cours de l'actif sous-jacent. Par conséquent, il va déterminer un nouveau ratio de couverture ϕ_k^* à l'instant $t = k\tau$ comme si l'échéance de l'option est $T - k\tau$. Par analogie, les stratégies de couverture optimale qui maximisent la fonction d'utilité exponentielle négative et la fonction d'utilité isoélastique sont données par les deux expressions (4.5.43) et (4.4.28) à l'exception que seuls les coefficients de ces expressions changent. Plus précisément, nous avons une nouvelle distribution terminale de l'actif sous-jacent conditionnelle à son cours x_k à l'instant $t_k = k\tau$:

$$\begin{aligned} \mu_{p,q}(t_k) &= \langle (\delta x_N)^q M_N^p \rangle \\ &= \int_{x_s}^{+\infty} (x - x_s)^p (x - x_k)^q f(x, N | x_k, t_k) dx \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

$$m_q(t_k) = \langle (\delta x_N)^q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_k)^q f(x, N | x_k, t_k) dx. \quad (4.5.3)$$

Afin d'étudier la performance et de comparer le ratio de couverture optimal via la maximisation de l'utilité espérée par rapport aux trois autres stratégies, Δ , quadratique et quartique, nous procédons dans ce qui suit une validation empirique sur les options d'achat sur l'indice CAC 40.

Nous considérons deux échantillons d'option d'achat sur l'indice CAC 40 : un premier échantillon traité pendant le mois de janvier 2007 durant laquelle le cours de l'actif sous-jacent, CAC 40, a subi une tendance à l'hausse, et un deuxième échantillon traité pendant le mois d'octobre 2007 durant laquelle le cours de l'actif sous-jacent, CAC 40, a subi une tendance à la baisse. Pour toute option d'achat émise, de prix d'exercice x_s , nous calculons les ratios de couvertures $\phi_{t=k\tau}^*(x_s)$ pour

chacune de cinq stratégies de couverture présentées ci-dessus. L'émetteur de l'option révisé quotidiennement son portefeuille jusqu'à l'échéance (fin janvier pour le premier échantillon et fin octobre pour le deuxième échantillon). Plus précisément, il calcule, quotidiennement, son ratio de couverture en minimisant le risque de la variation du portefeuille sur la période restante. Il est important de préciser que nous avons supposé que le cours de l'actif sous-jacent l'actif sous-jacent suit une distribution exponentielle négative de la forme (4.4.12).

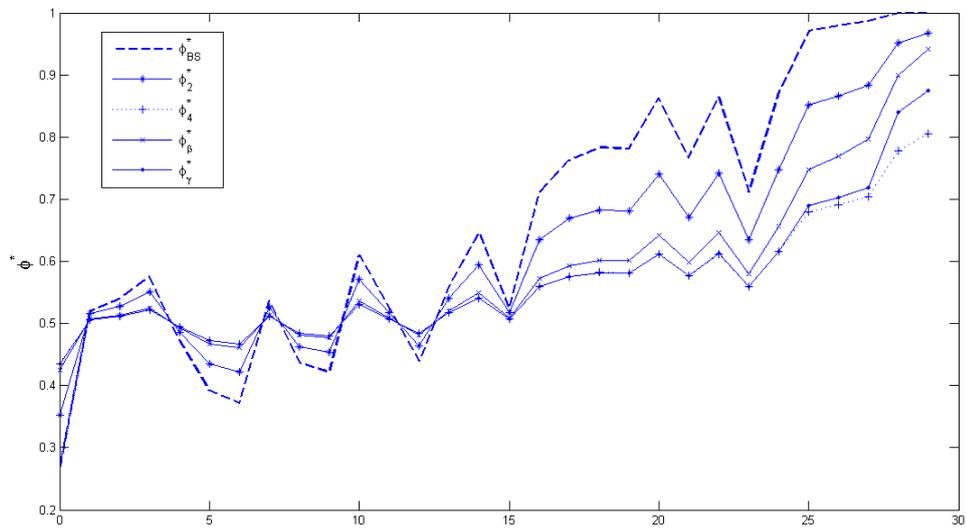


Figure 5.12 – L'évolution au cours de temps de cinq stratégies de couverture optimales en fonction de cours du sous-jacent : ϕ_{BS}^* , ϕ_2^* , ϕ_4^* , ϕ_β^* et ϕ_γ^* . L'option émise est de maturité mois (d'échéance fin janvier), de prix d'exercice 5500 et de prime 52,43. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative.

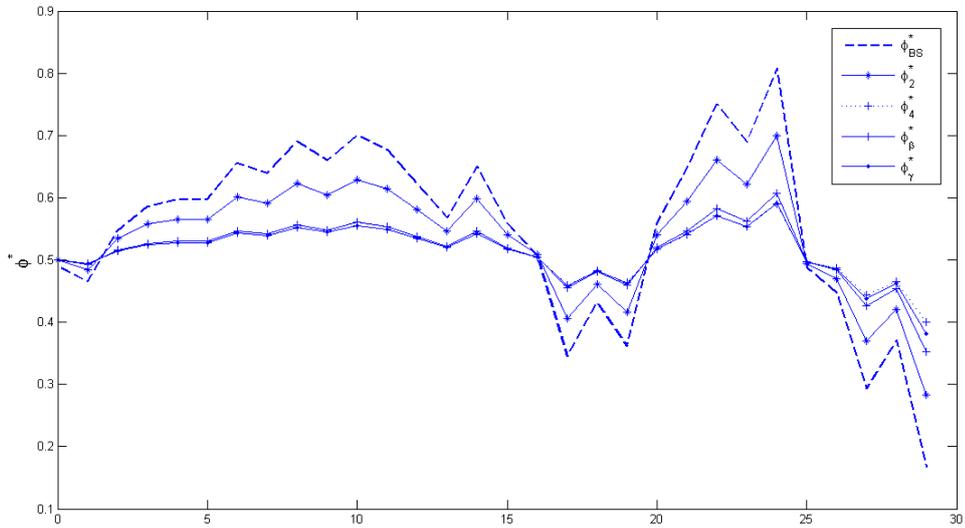


Figure 5.13 – L'évolution au cours de temps de cinq stratégies de couverture optimales en fonction de cours du sous-jacent : ϕ_{BS}^* , ϕ_2^* , ϕ_4^* , ϕ_β^* et ϕ_γ^* . L'option émise est de maturité mois (d'échéance fin octobre), de prix d'exercice 5750 et de prime 90,28. Le sous-jacent est supposé suivre distribution exponentielle négative.

Les deux Figures 5.12 et 5.13 présentent l'évolution de cinq stratégies de couverture optimales, ϕ_{BS}^* le delta de Black-Scholes, ϕ_2^* minimise la variance de bilan financier, ϕ_4^* minimise le moment d'ordre quatre du bilan financier, ϕ_β^* qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative et ϕ_γ^* qui maximise la fonction d'utilité isoélastique, correspondant à deux trajectoires différentes du cours du sous-jacent. Ces deux Figures montrent que les variations des stratégies de couverture quartique et via la maximisation de l'approche de l'utilité espérée sont plus lentes que celles de la stratégies de couverture en delta et la stratégie de couverture quadratique.

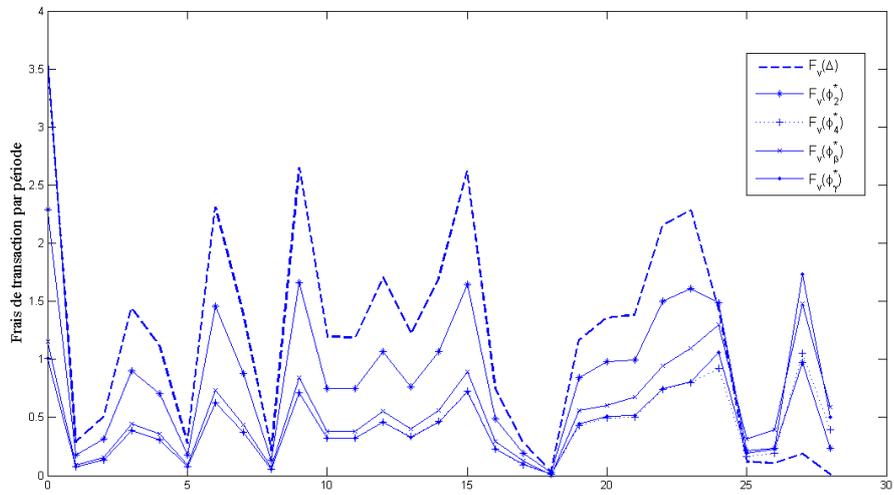


Figure 5.14 – Les frais de transactions payés à chaque intervalle de réajustement associés aux trajectoires des cinq stratégies rapportées sur la Figure 5.12. Le taux de pourcentage des frais de transactions est de 0.25%.

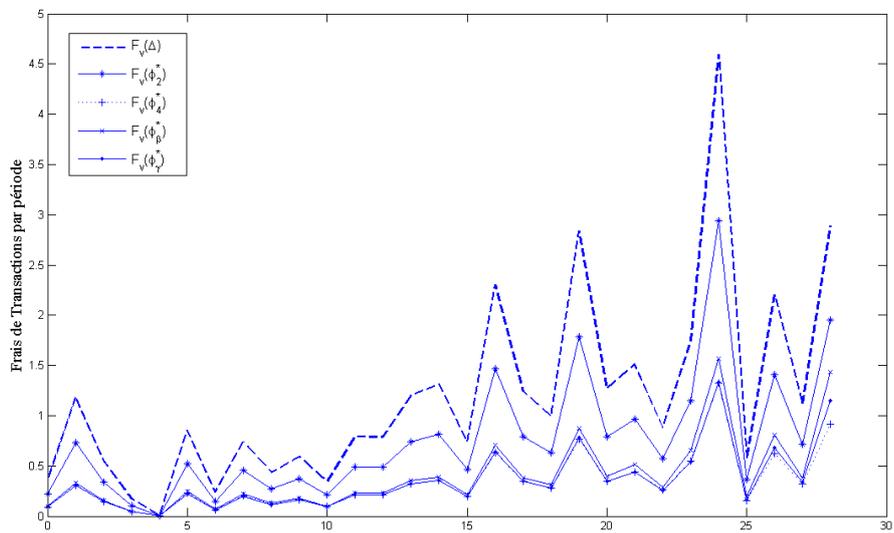


Figure 5.15 – Les frais de transactions payés à chaque intervalle de réajustement associés aux trajectoires des cinq stratégies rapportées sur la figure 5.13. Le taux de pourcentage des frais de transactions est de 0.25%.

Les Figures 5.14 et 5.15 tracent l'évolution des frais de transaction¹⁶ journaliers payés à chaque réajustement du ratio de couverture, associés aux deux trajectoires rapportées sur les Figures 5.13 et 5.12. Nous remarquons clairement, dans les deux Figures, que les stratégies de couvertures via la maximisation de l'utilité espérée et la stratégie de couverture quartique réduisent énormément les frais de transactions. L'objectif de la sous-section suivante est de rechercher l'ensemble de stratégies de couverture par la minimisation du risque de sa position entre la date initiale et l'échéance de l'option.

4.5.2 La stratégie de couverture dynamique

Dans cette sous-section, nous allons déterminer une stratégie de couverture ϕ_i^* ¹⁷ pour toute $i = 0 \cdots N - 1$. Cette stratégie de couverture ϕ_i^* , fonction du cours de l'actif sous-jacent x_i , à l'instant i est maintenant une variable aléatoire. Dans ce cas, la variation globale du bilan financier dépend de l'ensemble des stratégies ϕ_i^* . Reprenons l'expression de la variation du bilan financier global (4.3.8) d'un émetteur d'un Call ($r = 0$) :

$$\begin{aligned} \Delta W &= C - \max(x_N - x_s, 0) + \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \phi_k(x_k) \\ &= C - \max(x_N - x_s, 0) + \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_k(x_k). \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Nous supposons que les préférences de l'investisseur sont représentées par une fonction d'utilité exponentielle négative définie par (1.4.12), la mesure du risque est

16. Il paraît intéressant de signaler que la détermination du ratio de couverture optimal est effectuée dans un modèle sans frais de transaction. En revanche, à chaque réajustement du ratio de couverture, l'émetteur paie des frais de transaction correspondants. Formellement, il paie $v x_k |\phi_k^* - \phi_{k-1}^*|$, où v est le pourcentage des frais de transaction appliqué au montant de la transaction, $v = 0.25\%$ et x_k est le cours de l'actif sous-jacent du jour k . Il est à préciser que dans le cas où les frais de transactions sont endogènes, le bilan financier global dévient :

$$\Delta W = C - \max(x_N - x_s, 0) + \sum_{k=0}^{N-1} (x_{k+1} - x_k) \phi_k - v \left(x_0 \phi_0 \sum_{k=0}^{N-1} |\phi_{k+1} - \phi_k| x_{k+1} \right).$$

17. Pour des raisons de calculs trop compliqués, nous allons déterminer la stratégie de couverture dynamique uniquement pour la fonction d'utilité exponentielle négative.

égale :

$$\mathcal{R}_{exp}(\Delta W) = \sigma^2(\Delta W) - \frac{1}{3}\lambda_3(\Delta W)\beta + \frac{1}{12}\lambda_4(\Delta W)\beta^2. \quad (4.5.5)$$

Le ratio de couverture optimale, $\phi_{\beta,i}^*$ est solution de l'équation suivante :

$$\min(\mathcal{R}_{exp})|_{\phi_{\beta,i} \in \Omega(\phi_{\beta,i})\phi_{\beta,i}^*} \quad i = 0, \dots, N-1, \quad (4.5.6)$$

avec $\Omega(\phi_{\beta,i})$ est l'ensemble des stratégies de couvertures admissibles. Et :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{R}_{exp}}{\partial \phi_{\beta,i}}|_{\phi_{\beta,i}=\phi_{\beta,i}^*} = 0 \quad i = 0, \dots, N-1, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{R}_{exp}}{\partial \phi_{\beta,i}^2}|_{\phi_{\beta,i}=\phi_{\beta,i}^*} \geq 0. \end{cases} \quad (4.5.7)$$

Un calcul très long mais simple de l'équation 4.5.5 donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{exp} &= \beta^2 \left(-\frac{1}{3} \left\langle M_N \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^3 \right\rangle - \frac{1}{3} \left\langle M_N^3 \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right) \right\rangle \right. \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\langle M_N^2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^2 \right\rangle - \langle M_N \rangle^2 \left\langle M_N \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right) \right\rangle \\ &\quad \left. \langle M_N \rangle \left\langle M_N^2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right) \right\rangle - \langle M_N \rangle \left\langle M_N \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^2 \right\rangle \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \langle M_N \rangle^2 \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^2 \right\rangle + \frac{1}{3} \langle M_N \rangle \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^3 \right\rangle \\ &\quad + \frac{1}{3} \langle M_N \rangle^3 \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right) \right\rangle + \frac{1}{12} \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^4 \right\rangle \\ &\quad + \beta \left(2 \langle M_N \rangle \left\langle M_N \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right) \right\rangle - \frac{1}{3} \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^3 \right\rangle \right. \\ &\quad - \langle M_N \rangle \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^2 \right\rangle - \langle M_N \rangle^2 \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right) \right\rangle \\ &\quad \left. + \left\langle M_N \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^2 \right\rangle - \left\langle M_N^2 \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right) \right\rangle \right) \\ &\quad - 2 \left\langle M_N \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right) \right\rangle + 2 \langle M_N \rangle \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right) \right\rangle \\ &\quad \left. + \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^2 \right\rangle + \mathcal{R}_{exp,0}, \quad (4.5.8) \end{aligned}$$

où $\mathcal{R}_{exp,0}$ est le risque intrinsèque, associé à l'émission de l'option sans couverture ($\phi_\beta = 0$) et nous avons utilisé $\langle \delta x_k \rangle = 0$. Nous remarquons que toutes les termes de l'expression (4.5.8) peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\alpha_{p,q} = \left\langle M_N^p \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^q \right\rangle. \quad (4.5.9)$$

Par conséquence la dérivée de l'équation (4.5.8) est la somme des dérivées de ses termes.

- **q=1**

$\rightsquigarrow p = 0$

$$\begin{aligned} \alpha_{0,1} &= \left\langle \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k \rangle \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (4.5.10)$$

$\rightsquigarrow p \neq 0$

$$\begin{aligned} \alpha_{p,1} &= \left\langle M_N^p \sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right\rangle \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) M_N^p \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_R \phi_{\beta,k}(x_k) P(x, k | x_0, 0) dx \right. \\ &\quad \left. \times \int_{x_s}^{+\infty} \langle \delta x_k \rangle_{(x,k) \rightarrow (x',N)} (x' - x_s)^p P(x', N | x, k) dx' \right) \end{aligned} \quad (4.5.11)$$

où $P(x, t | x_0, t_0)$ est la loi de probabilité que le cours de l'actif sous-jacent X soit en x (à dx près) à l'instant t , sachant qu'au temps t_0 antérieur à t , le cours était en x_0 . La notation $\langle \delta x_k \rangle_{(x,k) \rightarrow (x',N)}$ signifie que la moyenne de δx_k est prise seulement sur les trajectoires qui partent de x au temps k et qui arrivent en x' au temps N . Cette quantité est égale

$$\langle \delta x_k \rangle_{(x,k) \rightarrow (x',N)} = \frac{x' - x}{N - k}. \quad (4.5.12)$$

La raison intuitive est que tous les δx_k (en nombre $N - k$) sur les trajectoires $(x, k) \rightarrow (x', N)$ contribuent de manière égale à la réalisation de l'accroissement total $x' - x$.¹⁸

En revenant au calcul de la dérivée de la quantité (4.5.12).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \phi_{\beta,k}(x_k)} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) M_N^p \rangle \right) = \frac{\partial \langle \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) M_N^p \rangle}{\partial \phi_{\beta,k}(x_k)} \quad (4.5.13) \\ & = \left[\int_{x_s}^{+\infty} (x' - x_s)^p \frac{x' - x}{N - k} P(x', N | x, k) dx' \right] \frac{\partial}{\partial \phi_{\beta,k}(x_k)} \left(\int_R \phi_{\beta,k}(x_k) P(x, k | x_0, 0) dx \right). \end{aligned}$$

Or, dans la réalité, les cours de l'actif sous-jacent sont affichés de manière discrète et non pas continue. Donc, nous pouvons remplacer les intégrales sur x par des sommes discrètes.

$$\int_R \phi_{\beta,k}(x_k) P(x, k | x_0, 0) dx = \sum_k \phi_{\beta,k}(x_k) P(x, k | x_0, 0); \quad (4.5.14)$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} \left(\sum_k \phi_{\beta,k}(x_k) P(x, k | x_0, 0) \right) = P(x, i | x_0, 0). \quad (4.5.15)$$

Donc la dérivée de la quantité (4.5.12) par rapport à $\phi_{\beta,i}(x_i)$ est :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) M_N^p \rangle \right) = P(x, i | x_0, 0) \\ & \times \left[\int_{x_s}^{+\infty} (x' - x_s)^p \frac{x' - x}{N - i} P(x', N | x, i) dx' \right] \\ & = \alpha_0. \quad (4.5.16) \end{aligned}$$

• **q=2**

$$\rightsquigarrow p = 0$$

$$\alpha_{0,2} = \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^2 \right\rangle$$

18. Voir Bouchaud et Potters , "théorie des risques financiers" page 164.

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k^2 \rangle \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \rangle + 2 \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \rangle \\
&= \mathbf{A}_1 + 2\mathbf{A}_2,
\end{aligned} \tag{4.5.17}$$

où nous avons utilisé la formule du multinôme de Newton. De façon explicite, nous pouvons exprimer les deux termes

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_1 &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k^2 \rangle \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left[\int_R \phi_{\beta,k}(x_k)^2 P(x, k|x_0, 0) \langle \delta x_k^2 \rangle dx \right].
\end{aligned} \tag{4.5.18}$$

Et

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_2 &= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \rangle \langle \delta x_j \rangle \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.5.19}$$

En effet, la variable $\phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j)$ est indépendante de l'accroissement δx_j ($j > k$). En revanche la stratégie de couverture $\phi_{\beta,k}(x_j)$ se décide après la réalisation de l'accroissement δx_k , donc elle dépend de $\phi_{\beta,k}(x_k)$. Calculons maintenant la dérivée¹⁹ de \mathbf{A}_1 par rapport à $\phi_{\beta,i}(x_i)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} &= 2 \langle \delta x_i^2 \rangle P(x, i|x_0, 0) \phi_{\beta,i}(x_i) \\
&= 2D\tau P(x, i|x_0, 0) \phi_{\beta,i}(x_i) \\
&= a_1 \phi_{\beta,i}(x_i),
\end{aligned} \tag{4.5.20}$$

où $\langle \delta x_k^2 \rangle = D\tau = x_k^2 \sigma_k^2 \tau$ est la volatilité du sous-jacent à l'échelle τ .

$\rightsquigarrow p \neq 0$

$$\alpha_{p,2} = \left\langle M_N^p \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^2 \right\rangle$$

19. En utilisant la même procédure que (4.5.14)

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k^2 \phi_{\beta,k}(x_k)^2 M_N^p \rangle + 2 \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j M_N^p \rangle \\
&= \mathbf{B}_1 + 2\mathbf{B}_2,
\end{aligned} \tag{4.5.21}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_1 &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k^2 \phi_{\beta,k}(x_k)^2 M_N^p \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left[\int_R \phi_{\beta,k}(x_k)^2 P(x, k | x_0, 0) dx \right] \right. \\
&\quad \left. \times \left[\int_{x_s}^{+\infty} \langle \delta x_k^2 \rangle_{(x,k) \rightarrow (x',N)} (x' - x_s)^p P(x', N | x, k) dx' \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{4.5.22}$$

La dérivée de la quantité (4.5.22) par rapport à $\phi_{\beta,i}(x_i)$ donne :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} &= 2\phi_{\beta,i}(x_i) P(x, i | x_0, 0) \\
&\quad \times \left[\int_{x_s}^{+\infty} \langle \delta x_i^2 \rangle_{(x,i) \rightarrow (x',N)} (x' - x_s)^p P(x', N | x, i) dx' \right] \\
&= b_1 \phi_{\beta,i}(x_i)
\end{aligned} \tag{4.5.23}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_2 &= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j M_N^p \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \int_{R^2} \int_{x_s}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} \langle \delta x_k \rangle_{(x_k,k) \rightarrow (x_j,j)} \langle \delta x_j \rangle_{(x_j,j) \rightarrow (x_N,N)} \\ (x_N - x_s)^p \phi_{\beta,k}(x_k) \phi_{\beta,j}(x_j) \\ P(x_N, N | x_j, j) P(x_j, j | x_k, k) P(x_k, k | x_0, 0) \end{array} \right) dx_N dx_j dx_k \\
&= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \int_{R^2} \int_{x_s}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} \frac{x_N - x_j}{N - j} \frac{x_j - x_k}{j - k} (x_N - x_s)^p \phi_{\beta,k}(x_k) \phi_{\beta,j}(x_j) \\ \times P(x_N, N | x_j, j) P(x_j, j | x_k, k) P(x_k, k | x_0, 0) \end{array} \right) dx_N dx_j dx_k.
\end{aligned}$$

La dérivée de \mathbf{B}_2 par rapport à $\phi_{\beta,i}(x_i)$ est donné par :

$$\frac{\partial \mathbf{B}_2}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} = \sum_{k=0}^{i-1} \int_R \int_{x_s}^{+\infty} \left(\begin{array}{c} \frac{x_N - x_i}{N - i} \frac{x_i - x_k}{i - k} (x_N - x_s)^p \phi_{\beta,k}(x_k) \\ \times P(x_N, N | x_i, i) P(x_i, i | x_k, k) P(x_k, k | x_0, 0) \end{array} \right) dx_N dx_k$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=i+1}^{N-1} P(x_i, i | x_0, 0) \int_R \int_{x_s}^{+\infty} \left(\frac{x_N - x_j}{N-j} \frac{x_j - x_i}{j-i} (x_N - x_s)^p \phi_{\beta, j}(x_j) \right) \\
& \quad \times P(x_N, N | x_j, j) P(x_j, j | x_i, i) dx_N dx_j \\
& = b_2.
\end{aligned}$$

• **q=3**

$$\rightsquigarrow p = 0$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{0,3} & = \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta, k}(x_k) \right)^3 \right\rangle \\
& = \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k^3 \rangle \langle \phi_{\beta, k}(x_k)^3 \rangle + 3 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k \neq j}^{N-1} \langle \phi_{\beta, k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta, j}(x_j) \delta x_j \rangle \\
& \quad + 6 \sum_{k=0}^{N-3} \sum_{j=k+1}^{N-2} \sum_{l=j+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta, k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta, j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta, l}(x_l) \delta x_l \rangle \\
& = \mathbf{C}_1 + 3\mathbf{C}_2 + 6\mathbf{C}_3, \tag{4.5.24}
\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_1 & = \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k^3 \rangle \langle \phi_{\beta, k}(x_k)^3 \rangle \\
& = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\int_R \phi_{\beta, k}(x_k)^3 P(x_k, k | x_0, 0) \langle \delta x_k^3 \rangle dx \right] \tag{4.5.25}
\end{aligned}$$

La dérivé de par rapport à $\phi_{\beta, i}(x_i)$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{C}_1}{\partial \phi_{\beta, i}(x_i)} & = 3 \langle \delta x_i^3 \rangle P(x_i, i | x_0, 0) \phi_{\beta, i}(x_i)^2 \\
& = c_1 \phi_{\beta, i}(x_i)^2. \tag{4.5.26}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_2 & = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k \neq j}^{N-1} \langle \phi_{\beta, k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta, j}(x_j) \delta x_j \rangle \\
& = \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta, k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta, j}(x_j) \delta x_j \rangle + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \langle \phi_{\beta, k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta, j}(x_j) \delta x_j \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \rangle \langle \delta x_j \rangle + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \rangle \langle \delta x_k^2 \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \rangle \langle \delta x_k^2 \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{R^2} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \langle \delta x_j \rangle_{(x_j,j) \rightarrow (x_k,k)} \\ \langle \delta x_k^2 \rangle P(x_k, k | x_j, j) P(x_j, j | x_0, 0) \end{array} \right) dx_k dx_j \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{R^2} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \frac{x_k - x_j}{k - j} \\ \langle \delta x_k^2 \rangle P(x_k, k | x_j, j) P(x_j, j | x_0, 0) \end{array} \right) dx_k dx_j
\end{aligned}$$

En effet, la variable $\phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j)$ est indépendante de l'accroissement δx_j ($j > k$) et la variable $\phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j$ est indépendante de l'accroissement δx_k^2 puisque ($k > j$). Calculons maintenant la dérivée de \mathbf{C}_2 par rapport à $\phi_{\beta,i}(x_i)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{C}_2}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} &= D\tau P(x, i | x_0, 0) \sum_{j=i+1}^{N-1} \int_R \frac{x_j - x_i}{j - i} \phi_{\beta,j}(x_j)^2 P(x_j, j | x_i, i) dx_j \\
&\quad + \left(2D\tau \sum_{j=0}^{i-1} \int_R \frac{x_i - x_j}{i - j} \phi_{\beta,k}(x_j)^2 P(x_i, i | x_k, k) P(x_j, j | x_0, 0) dx_j \right) \phi_{\beta,i}(x_i) \\
&= c_{2,1} + \phi_{\beta,i}(x_i) c_{2,2}.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}_3 &= \sum_{k=0}^{N-3} \sum_{j=k+1}^{N-2} \sum_{l=j+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-3} \sum_{j=k+1}^{N-2} \sum_{l=j+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \rangle \langle \delta x_l \rangle \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4.5.27}$$

Puisque la variable $\phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \phi_{\beta,l}(x_l)$ est indépendante de l'accroissement δx_l ($l > j > k$).

$\rightsquigarrow p = 1$

$$\alpha_{1,3} = \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k^3 \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^3 M_N \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k^3 \phi_{\beta,k}(x_k)^3 M_N \rangle + 3 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k \neq j}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j M_N \rangle \\
&\quad + 6 \sum_{k=0}^{N-3} \sum_{j=k+1}^{N-2} \sum_{l=j+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l M_N \rangle \\
&= \mathbf{D}_1 + 3\mathbf{D}_2 + 6\mathbf{D}_3, \tag{4.5.28}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_1 &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k^3 \phi_{\beta,k}(x_k)^3 M_N \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \left[\int_R \phi_{\beta,k}(x_k)^3 P(x_k, k | x_0, 0) dx \right] \right. \\
&\quad \left. \times \left[\int_{x_s}^{+\infty} \langle \delta x_k^3 \rangle_{(x,k) \rightarrow (x',N)} (x' - x_s)^p P(x', N | x, k) dx' \right] \right\} \tag{4.5.29}
\end{aligned}$$

sa dérivée par rapport à $\phi_{\beta,i}(x_i)$ est donné par

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{D}_1}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} &= 3\phi_{\beta,i}(x_i)^2 P(x_i, i | x_0, 0) \\
&\quad \times \left[\int_{x_s}^{+\infty} \langle \delta x_k^3 \rangle_{(x,k) \rightarrow (x',N)} (x' - x_s)^p P(x', N | x, k) dx' \right] \\
&= d_1 \phi_{\beta,i}(x_i)^2. \tag{4.5.30}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_2 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k \neq j}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j M_N \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j M_N \rangle + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j M_N \rangle \\
&= \mathbf{D}_{2,1} + \mathbf{D}_{2,2}
\end{aligned}$$

$$\mathbf{D}_{2,1} = \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j M_N \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \int_{R^2} \int_{x_s} \left(\phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \langle \delta x_j \rangle_{(x_j,j) \rightarrow (x_N,N)} \langle \delta x_k^2 \rangle_{(x_k,k) \rightarrow (x_j,j)} \right) dx_k dx_j dx_N \\
&= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \int_{R^2} \int_{x_s} \left(\phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \frac{x_N - x_j}{N - j} \langle \delta x_k^2 \rangle_{(x_k,k) \rightarrow (x_j,j)} \right) dx_k dx_j dx_N.
\end{aligned}$$

La dérivée de cette expression par rapport à $\phi_{\beta,i}(x_i)$ est donné par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{D}_{2,1}}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} &= \left[2P(x_i, i | x_0, 0) \sum_{j=i+1}^{N-1} \int_R \int_{x_s} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,j}(x_j) \langle \delta x_i^2 \rangle_{(x_j,j) \rightarrow (x_i,i)} \\ \times \frac{x_N - x_j}{N - j} (x_N - x_s) \\ P(x_j, j | x_i, i) P(x_N, N | x_j, j) \end{array} \right) dx_j dx_N \right] \phi_{\beta,i}(x_i) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{i-1} \int_R \int_{x_s} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,j}(x_j)^2 \langle \delta x_i^2 \rangle_{(x_i,i) \rightarrow (x_j,j)} \\ \times \frac{x_N - x_i}{N - i} (x_N - x_s) \\ P(x_N, N | x_i, i) P(x_i, i | x_j, j) P(x_j, j | x_0, 0) \end{array} \right) dx_k dx_N \\
&= d_{2,1,1} \phi_{\beta,i}(x_i) + d_{2,1,2}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{2,2} &= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j M_N \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{R^2} \int_{x_s} \left(\phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \langle \delta x_j \rangle_{(x_j,j) \rightarrow (x_N,N)} \langle \delta x_k^2 \rangle_{(x_k,k) \rightarrow (x_j,j)} \right) dx_k dx_j dx_N \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \int_{R^2} \int_{x_s} \left(\phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \frac{x_N - x_j}{N - j} \langle \delta x_k^2 \rangle_{(x_k,k) \rightarrow (x_j,j)} \right) dx_k dx_j dx_N.
\end{aligned}$$

Sa dérivée par rapport à $\phi_{\beta,i}(x_i)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{D}_{2,2}}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} &= \left[P(x_i, i | x_0, 0) \sum_{j=i+1}^{N-1} \int_R \int_{x_s} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,j}(x_j)^2 \frac{x_N - x_j}{N - j} \langle \delta x_i^2 \rangle_{(x_j,j) \rightarrow (x_i,i)} \\ \times (x_N - x_s) P(x_j, j | x_i, i) P(x_N, N | x_j, j) \end{array} \right) dx_j dx_N \right] \phi_{\beta,i}(x_i) \\
&\quad + 2 \sum_{j=0}^{i-1} \int_R \int_{x_s} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,j}(x_j) \frac{x_N - x_i}{N - i} \langle \delta x_i^2 \rangle_{(x_i,i) \rightarrow (x_j,j)} \\ \times (x_N - x_s) P(x_N, N | x_i, i) P(x_i, i | x_j, j) P(x_j, j | x_0, 0) \end{array} \right) dx_k dx_N \\
&= d_{2,2,1} \phi_{\beta,i}(x_i) + d_{2,2,2}. \tag{4.5.31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_3 &= \sum_{k=0}^{N-3} \sum_{j=k+1}^{N-2} \sum_{l=j+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l M_N \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-3} \sum_{j=k+1}^{N-2} \sum_{l=j+1}^{N-1} \int_{R^3} \int_{x_s} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,k}(x_k) \phi_{\beta,j}(x_j) \phi_{\beta,l}(x_l) \\ \langle \delta x_l \rangle_{(x_N, N) \rightarrow (x_l, l)} \langle \delta x_j \rangle_{(x_l, l) \rightarrow (x_j, j)} \langle \delta x_k \rangle_{(x_j, j) \rightarrow (x_k, k)} \\ P(x_N, N | x_l, l) P(x_l, l | x_j, j) P(x_j, j | x_k, k) P(x_k, k | x_0, 0) \end{array} \right) dx_N dx_l dx_j dx_k \\
&= \sum_{k=0}^{N-3} \sum_{j=k+1}^{N-2} \sum_{l=j+1}^{N-1} \int_{R^3} \int_{x_s} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,k}(x_k) \phi_{\beta,j}(x_j) \phi_{\beta,l}(x_l) \frac{x_N - x_l}{N-l} \frac{x_l - x_j}{l-j} \frac{x_j - x_k}{j-k} \\ P(x_N, N | x_l, l) P(x_l, l | x_j, j) P(x_j, j | x_k, k) P(x_k, k | x_0, 0) \end{array} \right) dx_N dx_l dx_j dx_k.
\end{aligned}$$

La dérivée de cette quantité par rapport à $\phi_{\beta,i}(x_i)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{D}_3}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} &= P(x_i, i | x_0, 0) \sum_{j=i+1}^{N-1} \sum_{l=j+1}^{N-1} \int_{R^2} \int_{x_s} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,j}(x_j) \phi_{\beta,l}(x_l) \frac{x_N - x_l}{N-l} \frac{x_l - x_j}{l-j} \frac{x_j - x_i}{j-i} \\ P(x_N, N | x_l, l) P(x_l, l | x_j, j) P(x_j, j | x_i, i) \end{array} \right) dx_N dx_l dx_j \\
&\quad + \sum_{j=0}^{i-1} \sum_{l=i+1}^{N-1} \int_R \int_R \int_{x_s} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,j}(x_j) \phi_{\beta,l}(x_l) \frac{x_N - x_l}{N-l} \frac{x_l - x_i}{l-i} \frac{x_i - x_j}{i-j} \\ P(x_N, N | x_l, l) P(x_l, l | x_i, i) P(x_i, i | x_j, j) \end{array} \right) dx_N dx_l dx_j \\
&\quad + \sum_{l=1}^{i-1} \sum_{j=0}^{l-1} \int_R \int_R \int_{x_s} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,j}(x_j) \phi_{\beta,l}(x_l) \frac{x_N - x_i}{N-i} \frac{x_i - x_l}{i-l} \frac{x_l - x_j}{l-j} \\ P(x_N, N | x_i, i) P(x_i, i | x_l, l) P(x_l, l | x_j, j) \end{array} \right) dx_N dx_l dx_j \\
&= d_3.
\end{aligned}$$

• $q=4$

$$\begin{aligned}
\alpha_{0,4} &= \left\langle \left(\sum_{k=0}^{N-1} \delta x_k \phi_{\beta,k}(x_k) \right)^4 \right\rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k^4 \phi_{\beta,k}(x_k)^4 \rangle + 6 \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j)^2 \delta x_j^2 \rangle \\
&\quad + 4 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j \neq k}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^3 \delta x_k^3 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \rangle \\
&\quad + 12 \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j \neq k}^{N-2} \sum_{l > j, l \neq k}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l \rangle \\
&\quad + 24 \sum_{k=0}^{N-4} \sum_{j=k+1}^{N-3} \sum_{l=j+1}^{N-2} \sum_{m=l+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l \phi_{\beta,m}(x_m) \delta x_m \rangle \\
&= \mathbf{E}_1 + 6\mathbf{E}_2 + 4\mathbf{E}_3 + 12\mathbf{E}_4 + 24\mathbf{E}_5, \tag{4.5.32}
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k^4 \phi_{\beta,k}(x_k)^4 \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k^4 \rangle \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^4 \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \langle \delta x_k^4 \rangle \int_R \phi_{\beta,k}(x_k)^4 P(x_k, k | x_0, 0) dx_k, \tag{4.5.33}
\end{aligned}$$

sa dérivée par rapport à $\phi_{\beta,i}(x_i)$ est donnée par :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{E}_1}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} &= 4\phi_{\beta,i}(x_i)^3 \langle \delta x_k^4 \rangle P(x_i, i | x_0, 0) \\
&= \phi_{\beta,i}(x_i)^3 e_1. \tag{4.5.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_2 &= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j)^2 \delta x_j^2 \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \delta x_k^2 \rangle \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j)^2 \delta x_j^2 \rangle. \tag{4.5.35}
\end{aligned}$$

La dérivée de cette expression est :

$$\frac{\partial \mathbf{E}_2}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} = 2D\tau \phi_{\beta,i}(x_i) \left(\begin{aligned} &P(x_i, i | x_0, 0) \sum_{j=k+1}^{N-1} \int_R \langle \delta x_i^2 \rangle_{(x_i,i) \rightarrow (x_j,j)} \phi_{\beta,j}(x_j)^2 dx_j \\ &+ \sum_{k=0}^{i-1} \int_R \langle \delta x_k^2 \rangle_{(x_k,k) \rightarrow (x_i,i)} \phi_{\beta,j}(x_k)^2 P(x_i, i | x_j, j) dx_k \end{aligned} \right) = \phi_{\beta,i}(x_i) e_2. \tag{4.5.36}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_3 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{k \neq j}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^3 \delta x_k^3 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^3 \delta x_k^3 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \rangle + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^3 \delta x_k^3 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \rangle \\
&= \sum_{k=0}^{N-2} \sum_{j=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^3 \delta x_k^3 \phi_{\beta,j}(x_j) \rangle \langle \delta x_j \rangle + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \rangle \langle \delta x_k^3 \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^3 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \rangle \langle \delta x_k^3 \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \int_R \int_R \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,k}(x_k)^3 \phi_{\beta,j}(x_j) \langle \delta x_j \rangle_{(x_j,j) \rightarrow (x_k,k)} \\ \langle \delta x_k^3 \rangle P(x_k, k | x_j, j) P(x_j, j | x_0, 0) \end{array} \right) dx_k dx_j \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \int_R \int_R \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,k}(x_k)^3 \phi_{\beta,j}(x_j) \frac{x_k - x_j}{k - j} \\ \langle \delta x_k^3 \rangle P(x_k, k | x_j, j) P(x_j, j | x_0, 0) \end{array} \right) dx_k dx_j.
\end{aligned}$$

Calculons maintenant la dérivée de \mathbf{E}_3 par rapport à $\phi_{\beta,i}(x_i)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{E}_3}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} &= \langle \delta x_i^3 \rangle \left\{ P(x, i | x_0, 0) \sum_{j=i+1}^{N-1} \int_R \frac{x_j - x_i}{j - i} \phi_{\beta,j}(x_j) P(x_j, j | x_i, i) dx_j \right. \\
&\quad \left. + \left(3 \sum_{k=0}^{i-1} \int_R \frac{x_i - x_j}{i - j} \phi_{\beta,j}(x_k)^3 P(x_i, i | x_j, j) P(x_j, j | x_0, 0) dx_j \right) \phi_{\beta,i}(x_i)^2 \right\} \\
&= e_{3,1} + e_{2,2} \phi_{\beta,i}(x_i)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_4 &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j \neq k}^{N-2} \sum_{l > j, l \neq k}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l > j, l \neq k}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l \rangle \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=k+1}^{N-2} \sum_{l=j+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=j+1}^{k-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l \rangle \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l \rangle \\
&\quad + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=k+1}^{N-2} \sum_{l=j+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=j+1}^{k-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l \rangle \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=k+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \rangle \langle \delta x_l \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{j=k+1}^{N-2} \sum_{l=j+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \rangle \langle \delta x_l \rangle \\
& = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=j+1}^{k-1} \int_{R^3} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \phi_{\beta,l}(x_l) \langle \delta x_j \rangle_{(x_j,j) \rightarrow (x_l,l)} \langle \delta x_j \rangle_{(x_l,l) \rightarrow (x_k,k)} \\ \langle \delta x_k^2 \rangle P(x_k, k | x_l, l) P(x_l, l | x_j, j) P(x_j, j | x_0, 0) \end{array} \right) dx_k dx_j dx_l \\
& = \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{l=j+1}^{k-1} \int_{R^3} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,k}(x_k)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \phi_{\beta,l}(x_l) \frac{x_l - x_j}{l - j} \frac{x_k - x_l}{k - l} \\ \langle \delta x_k^2 \rangle P(x_k, k | x_l, l) P(x_l, l | x_j, j) P(x_j, j | x_0, 0) \end{array} \right) dx_k dx_j dx_l
\end{aligned}$$

En effet, les variables $\phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l)$ et $\phi_{\beta,k}(x_k)^2 \delta x_k^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l)$ sont indépendantes de l'accroissement δx_l puisque ($l > j > k$). Calculons maintenant sa dérivée par rapport à $\phi_{\beta,i}(x_i)$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{E}_4}{\partial \phi_{\beta,i}(x_i)} & = D\tau P(x_i, i | x_0, 0) \sum_{l=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{k-1} \int_R \int_R \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,l}(x_l)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \frac{x_l - x_j}{l - j} \frac{x_j - x_i}{j - i} \\ P(x_l, l | x_j, j) P(x_j, j | x_i, i) \end{array} \right) dx_k dx_j dx_l \\
& + D\tau \sum_{l=i+1}^{N-1} \sum_{j=0}^{k-1} \int_R \int_R \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,l}(x_l)^2 \phi_{\beta,j}(x_j) \frac{x_l - x_i}{l - i} \frac{x_i - x_j}{i - j} \\ P(x_l, l | x_i, i) P(x_i, i | x_j, j) P(x_j, j | x_0, 0) \end{array} \right) dx_k dx_j dx_l \\
& + 2\phi_{\beta,i}(x_i) D\tau \sum_{j=0}^{i-2} \sum_{l=j+1}^{i-1} \int_{R^2} \left(\begin{array}{c} \phi_{\beta,l}(x_l) \phi_{\beta,j}(x_j) \frac{x_i - x_l}{i - l} \frac{x_l - x_j}{l - j} \\ P(x_i, i | x_l, l) P(x_l, l | x_j, j) P(x_j, j | x_0, 0) \end{array} \right) dx_k dx_j dx_l \\
& = e_{4,1} + e_{4,2} \phi_{\beta,i}(x_i)^2.
\end{aligned}$$

Et enfin,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_5 & = \sum_{k=0}^{N-4} \sum_{j=k+1}^{N-3} \sum_{l=j+1}^{N-2} \sum_{m=l+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \delta x_l \phi_{\beta,m}(x_m) \delta x_m \rangle \\
& = \sum_{k=0}^{N-4} \sum_{j=k+1}^{N-3} \sum_{l=j+1}^{N-2} \sum_{m=l+1}^{N-1} \langle \phi_{\beta,k}(x_k) \delta x_k \phi_{\beta,j}(x_j) \delta x_j \phi_{\beta,l}(x_l) \phi_{\beta,m}(x_m) \delta x_m \rangle \langle \delta x_l \rangle \\
& = 0. \tag{4.5.37}
\end{aligned}$$

En définitive, la stratégie de couverture dynamique optimale $\phi_{\beta,i}(x_i)$ est une solution de l'équation de troisième degré suivante :

$$A_1 \phi_{\beta,i}(x_i)^3 + A_2 \phi_{\beta,i}(x_i)^2 + A_3 \phi_{\beta,i}(x_i) + A_4 = 0 \tag{4.5.38}$$

avec

$$A_1 = \frac{1}{3}\beta^2 e_1 \quad (4.5.39)$$

$$A_2 = \beta^2 \left(-\frac{1}{3}d_1 + \frac{1}{3}c_1\mu_{1,0} + 4e_{3,2} \right) - \beta\frac{1}{3}c_1 \quad (4.5.40)$$

$$A_3 = \left(\begin{array}{l} \beta^2 \left(-d_{2,1,1} - d_{2,2,1} - \mu_{1,0}b_1 + \frac{1}{2}a_1\mu_{1,0}^2 + \frac{1}{2}b_1c_{2,2}\mu_{1,0} + \frac{1}{2}(e_{2,1} + e_{2,2}) \\ + \frac{1}{12}e_{4,2} \right) + \beta(-c_{2,2} - \mu_{1,0}a_1 + b_1) + a_1 \end{array} \right) \quad (4.5.41)$$

$$A_4 = \left(\begin{array}{l} \beta^2 \left(-d_{2,1,2} - d_{2,2,2} - d_3 - \frac{1}{3}\alpha_0 + b_2 - \mu_{1,0}^2\alpha_0 + \mu_{1,0}\alpha_0 - 2\mu_{1,0}b_2 \\ + \mu_{1,0}c_{2,1} + \frac{1}{2}e_{2,2} + \frac{1}{3}e_{3,1} + e_{4,1} \right) + \beta(2\mu_{1,0}\alpha_0 - c_{2,1} + 2b_2 - \alpha_0) - 2\alpha_0 \end{array} \right) \quad (4.5.42)$$

Une application de la formule de Cardan à l'équation 4.5.38 nous donne :

$$\phi_{\beta,i}(x_i)^* = \frac{1}{6A_1} \sqrt[3]{\Lambda + \Theta} - \frac{2}{3A_1} \left(\frac{\Psi}{\sqrt[3]{\Lambda + \Theta}} \right) - \frac{1}{3} \frac{A_2}{A_1}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1. \quad (4.5.43)$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Lambda = 36A_3A_2A_1 - 108A_4A_1^2 - 8A_2^3 \\ \Theta = 12\sqrt{3}A_1\sqrt{4A_3^3A_1 - A_3^2A_2^2 - 18A_4A_3A_2A_1 + 27A_4^2A_1^2 + 4A_4A_2^3} \\ \Psi = 3A_3A_1 - A_2^2 \end{array} \right.$$

Quoique compliqué et difficile à interpréter, le ratio de couverture dynamique optimal a une solution exacte. Nous remarquons que les coefficients de l'équation (4.5.38), à la différence de la stratégie de couverture statique, dépendent de l'aversion au risque, la distribution de l'actif sous-jacent et de la moyenne de ratios de couverture historiques (cf. par exemple b_2 , $c_{2,1}$, d_3). En clair que la stratégie de couverture statique translatée est beaucoup plus simple au niveau de calcul par rapport à une couverture dynamique.

Dans cette section, nous avons supposé que l'excès de rentabilité de sous-jacent est nul. Cette hypothèse trouve sa justification dans le fait que l'effet des valeurs moyenne de $\phi_{\beta,i}(x_i)$ est généralement faible par rapport à l'amplitude des fluctuations et surtout dans le cas où les intervalles de temps pris entre x_i et x_{i+1} sont

assez réduits ou encore pour les options de courte maturité. Nous avons supposé aussi que les frais de transactions sont supposés payés de manière exogène, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas intégrés dans le bilan financier global. En revanche, dans la réalité, les frais de transactions, qui rendent la stratégie de couverture plus coûteuse, sont endogènes. En effet, une partie de ces frais est fixe, indépendante du montant effectuée et une autre partie est proportionnelle au nombre d'actions du sous-jacent échangées lors d'un rééquilibrage du portefeuille. La voie de la recherche du ratio de couverture via le critère de la maximisation de l'utilité espérée reste une piste intéressante à explorer dans le cas où les excès de rentabilité de sous-jacent sont non nuls et les frais de transactions sont endogènes.

4.6 conclusion

Black-Scholes (1973) ont montré que lorsque le processus de l'actif sous-jacent suit un processus gaussien en temps continu, il existe une stratégie de couverture "parfaite", en ce sens que le risque associé à l'émission de l'option est strictement nul. Malheureusement, cette stratégie de couverture n'a pas de justificatif d'application sur des marchés où les fluctuations de l'actif sous-jacents sont non gaussiens. La notion de risque nul est irréaliste, en effet dans un marché incomplet, l'émetteur se trouve confronté à un risque résiduel non nul. Par conséquent, la couverture ne peut donc pas être parfaite. Cependant, une couverture optimale à risque minimal existe.

L'objectif dans ce chapitre était la recherche d'une stratégie de couverture via le critère de la maximisation de l'utilité espérée. Nous avons déterminé dans un premier temps une stratégie de couverture statique qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative, caractérisée par une aversion absolue au risque. Et une stratégie de couverture qui maximise la fonction d'utilité isoélastique caractérisée par une aversion au risque relative. Nous avons montré que lorsque le paramètre de l'aversion au risque tend vers l'infini, le ratio de couverture déduit de la fonction d'utilité tend vers la stratégie qui minimise le moment d'ordre quatre. Nous avons trouvé que la stratégie de couverture via la maximisation de la fonction d'uti-

lité, pour la fonction d'utilité exponentielle négative ou pour la fonction d'utilité isoélastique, est compliquée mais admet une solution explicite et exacte. Nous avons trouvé que les stratégies de couverture optimales via la maximisation de l'utilité espérée réduisent sa sensibilité par rapport à la dynamique de l'actif sous-jacent (réduction du "Gamma"), en comparaison avec le delta de Black-Scholes (1973) et la stratégie de couverture via la minimisation de la variance de Bouchaud et Petters (1997-2000).

Ces stratégies de couverture statiques ramènent sûrement le risque de la variation du portefeuille entre l'instant initial et l'échéance à son minimum et non pas à tout instant $t > 0$. Pour pallier à ce problème, nous avons essayé, dans un deuxième temps, de déterminer une stratégie de couverture dynamique via le critère de la maximisation de l'utilité espérée. Nous avons montré que les paramètres du ratio de couverture dynamique, à la différence de la stratégie de couverture statique, dépendent de l'aversion au risque, la distribution de l'actif sous-jacent et de la moyenne des ratios de couverture futures. Nous n'avons pas mesuré l'efficacité de cette stratégie de couverture à travers une validation empirique réelle comme c'était le cas de la stratégie de couverture statique translatée, du fait que la stratégie de couverture dynamique optimale est assez complexe. Nous avons montré, aussi, comment les stratégies de couverture dynamique (statique translatée dans le temps) via l'approche de l'utilité espérée réduisent énormément les frais de transactions associés, en comparaison, toujours, avec celle correspondant en delta, quadratique et quartique.

Bibliographie

- [1] **Baaquie B. E. ,Lianga C. & Warachka M. C. (2007)**, *Hedging LIBOR derivatives in a field theory model of interest rates*, Physica A, Vol.374, pp.730748.
- [2] **Black F. & Scholes M. (1973)**, *The pricing of options and corporate liabilities*, Journal Political Economic. Vol.81, pp.637654.
- [3] **Bouchaud J. P.(2002)**, *An introduction to statistical finance*, Physica A 313, pp.238-251.
- [4] **Bouchaud J. P. & Potters M. (1997)**, *Théorie des risques financiers*, Aléa-Saclay, Eyrolles, Paris.
- [5] **Bouchaud J. P. & Potters M. (2000)**, *Theory of Financial Risks : From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [6] **Bouchaud J. P. & Pochart B. (2004)**, *Option pricing and hedging with minimum local expected shortfall*, Quantitative Finance, 4(5), pp.607-618.
- [7] **Bouchaud J. F. & Selmi F. (2003)**, *Alternative Large Risks Hedging Strategies for Options*, Wilmott Magazine Issue 4, pp.6467.
- [8] **Boyle P. & Emmanuel D. (1980)**, *Discretely Adjusted Option Hedges* , Journal of Financial Economics, pp.259-282.
- [9] **Engle R. F. & Rosenberg J. F. (1994)**, *Hedging options in a GARCH environnement : Testing the Term Structure of Stochastic Volatility Models*, UCSD discussion paper.
- [10] **Engle R. F. & Rosenberg J. F. (1995)**, *Garch gamma*, NBER working paper series, N°5128.

- [11] **Föllmer H. & Sandernaman D. (1986)**, *Hedging of non-redundant contingent claims*, in : W. Hildenbrand and A. Mas-Colell (eds.), Contributions to Mathematical Economics, pp.205-223.
- [12] **Föllmer H. & Schweizer M. (1991)**, *Hedging of contingent claims under incomplete information*, Applied Stochastic Analysis (M.H.A. Davis & R.J. Elliott, (eds.), Gordon and Breach Science Publishers.
- [12] **Galai D. (1983)**, *The Components of the Return From Hedging Options Against Stocks*, The Journal of Business, Vol. 56, N°1, pp.45-54.
- [14] **Hulley H. & Mcwaler T. A.(2008)**, *Quadratic Hedging of Basis Risk*, Quantitative Finance Research Centre, Research Paper 225.
- [15] **Johannes S. & Poulsen R. (2008)**, *The Long and Short of Static Hedging with Frictions*, Wilmott Magazine, Issue 38, pp.62-67.
- [16] **Kabanov Y. M. & Safarian M. M. (1997)**, *On Leland's strategy of option pricing with transactions costs* , Finance and Stochastics, pp.239-250.
- [17] **Markowitz H. M. (1959)**, *Portfolio selection, efficient diversification of investment*, New Haven, CT, Yale university Press.
- [18] **Merton R. C. (1973)**, *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, Vol.4, pp.141-183.
- [19] **Selmi F. (2003)**, *Options et couverture des risques extrêmes*, Thèse, Université Paris II.

CONCLUSION GÉNÉRALE

L'approche traditionnelle des produits dérivés consiste, sous certaines hypothèses bien définies, à trouver une stratégie de couverture "parfaite", qui annule totalement le risque. Malheureusement, cette stratégie de couverture n'a pas de justification au moment de son application sur des marchés où les fluctuations de l'actif sous-jacent sont non gaussiennes. La notion de risque nul est irréaliste. Cependant, une couverture optimale à risque minimal existe. En d'autres termes, un investisseur rationnel cherche, naturellement, à minimiser le risque de sa position, c'est à dire, l'émetteur d'une option détermine la stratégie de couverture qui lui permet de réduire, autant que possible, le risque de sa position, d'où la notion de risque minimal. On passe d'une approche classique d'une couverture "parfaite" à risque zéro à une couverture "optimale" à risque minimum.

Les approches traditionnelles de calcul du risque comme la variance, les différentes méthodes de calcul de la VaR et l'Expected Shortfall ne s'avèrent pas suffisantes puisqu'elles ne tiennent pas compte de l'attitude de l'investisseur vis-à-vis du risque. Dès lors, dans une perspective d'amélioration de l'évaluation du risque, nous avons développé théoriquement dans le premier chapitre des mesures de risque fondées sur les fonctions d'utilité de l'investisseur, qui présentent en outre la caractéristique de tenir compte des moments d'ordre trois et quatre. En effet, nous avons déterminé, à partir d'un programme de maximisation de l'espérance d'utilité et sous certaines conditions, une mesure générale de risque s'appliquant aux fonctions d'utilité expo-

nentielle négative, isoélastique ou CRRA (constant relative risk aversion) et hyperbolique ou HARA (hyperbolic absolute risk aversion). A titre d'illustration, nous avons appliqué ces mesures de risque aux indices boursiers les plus connus à savoir : CAC40, DAX, FTSE100, NIKKEI et NASDAQ, en les comparant aux mesures de risque traditionnelles. Nos résultats mettent en évidence que ces mesures sont sensibles au choix des différents paramètres d'aversion au risque. La variation de cette mesure du risque est positive pour les fonctions d'utilité exponentielle négative et isoélastique, alors qu'elle change de sens pour la fonction d'utilité hyperbolique en fonction des différents paramètres de l'aversion au risque.

Nous mettons en évidence que les mesures de risque et les stratégies de couvertures optimales, via la l'approche de l'utilité espérée, que nous avons développés sont sensibles au choix de l'aversion au risque. En d'autres termes, le fameux paramètre de l'aversion au risque joue un rôle crucial dans la mesure du risque et la détermination de la stratégie de couverture optimale ce qui nous conduit à estimer ce paramètre. Nous avons estimé dans un deuxième chapitre la fonction de densité neutre au risque afin de déduire la fonction d'aversion au risque dans le troisième chapitre. Nous avons comparé et implémenté huit méthodes d'estimation de la densité neutre au risque à partir des données d'options sur l'indice CAC 40. Afin d'appréhender l'impact de la période d'analyse, nous avons considéré deux périodes : une période "normale" et une période de crise celle de 2007. Dans une optique de comparaison des divers modèles d'estimation de la densité, nous avons vérifié les propriétés statistiques des différentes densités, et calculé en outre des mesures appropriées d'ajustement. Nos résultats montrent que le mélange de log-normales, l'expansion d'Edgeworth, les polynômes d'Hermite, le modèle à saut et le modèle d'Heston s'ajustent le mieux aux données historiques et présentent des queues plus épaisses que la distribution log-normale. En outre, selon les différents critères d'ajustement, le modèle de diffusion fournit une meilleure estimation de la densité que les autres modèles sur la période pré-crise, et ce pour des échéances relativement courtes. Toutefois, pendant cette même période, le modèle de mélange de log-normales semble être plus performant pour les options à échéance supérieure à 3 mois. Dans les périodes de crise et post-crise, nous constatons que les modèles semi-paramétriques sont ceux qui offrent un

meilleur ajustement pour toutes les échéances, avec une différence minimale observée pour le modèle de mélange de log-normales.

Dans le chapitre trois, nous avons estimé la fonction d'aversion au risque implicite durant deux périodes, pré-crise et post-crise, pour différentes maturités d'options. Après une estimation de la densité subjective fondée sur la méthode développée par Jackwerth (2000), nous avons choisi, pour estimer la densité neutre au risque, les modèles à saut et mélange de log-normales puisque nous avons préalablement montré qu'ils offraient le meilleur ajustement. Par ailleurs, nous avons examiné simultanément l'impact de la maturité, du modèle d'estimation de la densité neutre au risque et de la période d'étude sur l'estimation de la fonction d'aversion au risque. Nos résultats montrent que les distributions subjectives ont la forme d'une distribution log-normale durant les périodes de crise, pré-crise et post-crise. En outre, durant la période de crise, les distributions neutres au risque du modèle log-normal et du modèle à saut sont leptokurtiques et étalées vers la gauche, alors que la distribution subjective ne change pas de forme contrairement à ce que préconisent Jackwerth et Rubinstein (1996) et Jackwerth (2000). Nos valeurs d'aversion au risque sont très proches de celles obtenues par Mehra et Prescott (1985). Notre analyse de sensibilité fondée sur la modification de la maturité résiduelle des options de un mois à deux et trois mois, montre que la forme de la fonction de l'aversion au risque n'est pas affectée pour des échéances de un et deux mois, corroborant les résultats de Jackwerth (2000). En revanche, pour la maturité trois mois, la forme de la fonction d'aversion au risque est clairement affectée. En outre, la courbe en U est plus marquée pour les échéances les plus élevées. Nos résultats montrent que la forme de la fonction d'aversion au risque n'est pas substantiellement affectée si l'on extrait la densité neutre au risque à partir d'un modèle de diffusion de saut ou un mélange de log-normales. De plus, l'intervalle de variation de la fonction d'aversion pour le risque en période post-crise, lorsque la tendance de marché est haussière, est plus étendue qu'en périodes de pré-crise et crise pour les maturités élevées.

Dans la ligne de l'approche de l'optimisation de risque, nous avons développé, au chapitre quatre, un modèle de couverture qui tient compte de l'aversion au risque

de l'émetteur d'une option vis-à-vis au risque. Nous avons proposé dans un premier temps une stratégie de couverture statique qui maximise la fonction d'utilité exponentielle négative, caractérisée par une aversion absolue au risque. Et une stratégie de couverture qui maximise la fonction d'utilité isoélastique caractérisée par une aversion au risque relative. Nous avons montré que lorsque le paramètre de l'aversion au risque tend vers l'infini, le ratio de couverture déduit de la fonction d'utilité tend vers la stratégie qui minimise le moment d'ordre quatre. Nous avons trouvé, aussi, que la stratégie de couverture via la maximisation de la fonction d'utilité, pour la fonction d'utilité exponentielle négative ou celle isoélastique, est compliquée mais admet une solution explicite et exacte. Nous avons démontré que les stratégies de couverture optimales via la maximisation de l'utilité espérée réduisent sa sensibilité par rapport à la dynamique de l'actif sous-jacent (réduction du "Gamma"), en comparaison avec le delta de Black-Scholes (1973), la stratégie de couverture via la minimisation de la variance de Bouchaud et Petters (1997-2000) et la stratégie de couverture via la minimisation du moment d'ordre quatre de Bouchaud et Selmi (2003).

Dans la deuxième partie du dernier chapitre, nous avons essayé de déterminer une stratégie de couverture dynamique via le critère de la maximisation de l'utilité espérée. Nous avons montré que les paramètres du ratio de couverture dynamique, à la différence de la stratégie de couverture statique, dépendent de l'aversion au risque, la distribution de l'actif sous-jacent, qui est arbitraire, et de la moyenne des ratios de couverture futures. Nous n'avons pas mesuré l'efficacité de cette stratégie de couverture à travers une validation empirique réelle comme c'était le cas de la stratégie de couverture statique translatée, du fait que la stratégie de couverture dynamique optimale est assez complexe. Nous avons montré, aussi, comment les stratégies de couverture dynamique (statique translatée dans le temps) via l'approche de l'utilité espérée réduisent énormément les frais de transactions associés, en les comparant, toujours, avec celle correspondant en delta, quadratique et quartique.

Plusieurs extensions sont possibles dans le sens des travaux réalisés dans cette thèse. La question de l'importance de la prise en compte des frais de transactions

endogènes mérite à notre sens d'être prolongée et investiguée. Par ailleurs, une deuxième piste d'extension possible pourrait être d'élargir le champ d'application à d'autres types d'options. Nous pensons, particulièrement, aux options américaines mais également aux options dites exotiques dont l'engouement ne cesse d'augmenter.

Enfin, nous espérons avoir participé, via cette thèse, à renforcer la réalisme de l'approche de la minimisation du risque, et mettre en évidence la question fondamentale de la couverture, particulièrement dans des marchés non gaussiens.

BIBLIOGRAPHIE GÉNÉRALE

Abadir. K & Rockinger. M (1997), *Density-Embedding Functions*, HEC Working Paper.

Abken P., Madan D. B. & Ramamurtie R. (1996), *Estimation of Risk-Neutral and Statistical Densities by Hermite Polynomial Approximation : With an Application to Eurodollar Futures Options*, Federal Reserve Bank of Atlanta, Working Paper 96-5.

Agarwal V. & Naik N. (2004), *Risk and Portfolio Decisions Involving Hedge Funds*, International Review of Economics and Finance 9(3), 209-222.

Aït-Sahalia Y. & Lo A. W. (1998), *Non-parametric estimation of state-price densities implied in financial asset prices*, Journal of Finance, vol. 53, pp. 499-517, April.

Aït-Sahalia Y. & Lo A. W. (2000), *Non-parametric Risk Management and Implied Risk Aversion*, The Journal of Econometrics, 94, 9-51.

Alonso A., Ganzala. R & Tusell F. (1990), *Asset Pricing and Risk Aversion in the Spanish Stock Market*, Journal of Banking and Finance, Vol. 14. August, pp 351-369.

Anagnar I., Mascia B., Hodges D. S. & Tompkins. T (2002), *The relation between implied and realised probability density functions*, Working Paper University

of Technology Vienna.

Azzalini A. & Bowman A. W. (1997), *Applied Smoothing Techniques for Data Analysis*, London :Oxford University Press.

Baaquie B. E. , Lianga C. & Warachka M. C. (2007), *Hedging LIBOR derivatives in a field theory model of interest rates*, *Physica A*, Vol.374, pp.730748.

Bahra B. (1996), *Probability distributions of future asset prices implied by option prices*, Bank of England Quarterly Bulletin : August 1996, 299-311.

Baillie R. T. & DeGennaro R. P.(1990), *Stock Returns and Volatility*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, 203-214.

Bali T. G., & Gokcan S. , (2004), *Alternative Approaches to estimating VaR for Hedge Fund Portfolios*, Edited by Barry Schachter, *Intelligent Hedge Fund Investing*, 253-277, Risk Books, Publisher : Incisive Media PLC.

Bates D. S (1976), *The Crash of '87' : Was It Expected? The Evidence from Option Markets*, *Journal of Finance*, Vol. 46, pp 1009-1044.

Beirlant J., Vynckier P. & Teugels J.L., (1996), *Tail Index Estimation, Pareto Quantile Plots, and Regression Diagnostics*, *Journal of the American Statistical Association*, 91, 1659-1667.

Bell D.E. (1988), *One-switch utility function and a measure of risk*, *Management Science*, vol. 34, 1416-1424.

Bell D.E. (1995), *Risk, return, and utility*, *Management Science*, vol. 41, 23-30.

Bellalah M. & Selmi F. (2002), *Les fonctions d'utilité et l'avantage informationnel des moments d'ordre supérieurs : application à la couverture d'options*, *Finance* 23, 14-27.

Black F. (1976), *The Pricing of Commodity Contracts*, *Journal of Financial Economics*, Vo. 3, pp 167-179.

Black F. & Scholes M. (1973), *The pricing of Options and Corporate Liabilities*, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637-659, May-June.

Bliss R. & Panigirtzoglou N. (2002), *Testing the Stability of Implied Probability Density Functions*, *Journal of Banking and Finance*, 26, pp. 381-422, March.

- Bliss R. & Panigirtzoglou N. (2004)**, *Option-implied Risk Aversion Estimates*, Journal of Finance, Vol. 59, No. 1, pp. 407-446.
- Blume M. E. & Friend I (1975)**, *The Demand for Risky Assets*, American Economic Review, Vol. 65, pp.900-922.
- Breeden, D.T, & R.H. Litzenberger(1978)**, *Prices of state-contingent claims implicit in option prices*, Journal of Business, Vol. 51, pp. 621-651, October.
- Bouchaud J. P. (2002)**, *An introduction to statistical finance*, Physica A 313, pp.238-251.
- Bouchaud J. P. & Potters M., (1997)**, *Théories des risques financiers*, coll. "Aléa-Saclay".
- Bouchaud J. P. & Potters M. (2000)**, *Theory of Financial Risks : From Statistical Physics to Risk Management*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Bouchaud J. B. & Pochart B. (2004)**, *Option pricing and hedging with minimum local expected shortfall*, Quantitative Finance, 4(5), pp.607-618.
- Bouchaud J. P. & Selmi F.,(2001)**, *Risk business*, Wilmott magazine.
- Bouchaud J. P. & Selmi F. (2003)**, *Alternative Large Risks Hedging Strategies for Options*, Wilmott Magazine Issue 4, pp.6467.
- Boes M. J., Drost F. C & Bas J. M. W. (2005)**, *Nonparametric Risk-Neutral Return and Volatility Distributions*, Tilbury University, Working Paper.
- Boyle P. & Emmanuel D. (1980)**, *Discretely Adjusted Option Hedges* , Journal of Financial Economics, pp.259-282.
- Campa J. M, Chang P. H. K & Reider R. L. (1998)**, *Implied Exchange Rate Distributions : Evidence from OTC Options Markets*, Journal of International Money and Finance, Vol. 17, No. 1, pp. 117-160.
- Coles S. (2001)**, *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*, Springer Verlag.
- Coombs C. H. & Lehner P. E., (1981)**, *An evaluation of tow alternative models for a theory of risk : Part 1*, Journal Experimental Psychology, Human Perception and Performance, N°7, 1110-1123.

- Coombs C. H. & Lehner P. E., (1981)**, *Conjoint design and analysis of the bilinear model : An application to judgments of risk*, Journal Math. psychology, N°28, 1-42.
- Coutant S. (1999)**, *Implied risk aversion in option prices using hermite polynomials*, in *Estimating and interpreting probability density function*, Bank for International Settlements.
- Coutant S. (2001)**, *Contenu en information dans le prix d'options : estimation de la densité neutre au risque du sous-jacent et applications*, Thèse, Université Paris Dauphine.
- Coutant S., Rockinger M. & Jondeau E. (2001)**, *Reading PIBOR Futures Options Smile : The 1997 Snap Election*, Journal of Banking and Finance, Vol. 25, No. 11, pp. 1957-1987.
- Cox J.C. & Ross S. A.(1976)**, *The valuation of option for alternative stochastic processus*, Journal of Financial Economics, Volume. 3, Issues 1-2, January-March 1976, pp. 145-166.
- Danielsson J. & Casper G. de Vries (1998)**, *Beyond the Sample : Extreme Quantile and Probability Estimation*, Discussion Paper 298, London School of Economics.
- Dowd K. (2000)**, *Adjusting for Risk : An Improved Sharpe Ratio*, International Review of Economics and Finance 9(3), 209-222.
- Dowd K. (2002)**, *A Bootstrap Backtest*, Risk, 15, N°10, 93-94.
- Galai D. (1983)**, *The Components of the Return From Hedging Options Against Stocks*, The Journal of Business, Vol. 56, N°1, pp.45-54.
- Embrechts P., Klüppelberg C. & Mikosch T. (1997)**, *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer Verlag.
- Embrechts P., McNeil A. & Straumann D. (2002)**, *Correlation and Dependence in Risk Management : Properties and Pitfalls*, In Risk Management : Value at Risk and Beyond, ed. M.A.H. Dempster, Cambridge University Press, 176-223.

Enzo G., Handel M. & Härdle W. K. (2006), *Time Dependent Relative Risk Aversion*, SFB 649 Discussion Papers SFB649DP2006-020, Sonderforschungsbereich 649, Humboldt University, Berlin, Germany.

Engle F. R. & Rosenberg J. V.(1994), *Hedging options in a GARCH environment : Testing the Term Structure of Stochastic Volatility Models*, UCSD discussion paper.

Engle. F. R & Rosenberg. J. V(1994), *GARCH GAMMA*, NBER working paper series, N°5128.

Favre L. & Galeano J. (2002), *Mean-Modified Value-at-Risk Optimization with Hedge Funds*, Journal of Alternative Investment 5(2), 21-25.

Fishburn P. C. (1982), *Foundations of risk measurement, I, Risk as probable loss*, Management Science, N°30, 296-406.

Föllmer H. & Sandernaman D. (1986), *Hedging of non-redundant contingent claims*, in : W. Hildenbrand and A. Mas-Colell (eds.), Contributions to Mathematical Economics, pp.205-223.

Föllmer H. & Schweizer M. (1991), *Hedging of contingent claims under incomplete information*, Applied Stochastic Analysis (M.H.A. Davis & R.J. Elliott, (eds.), Gordon and Breach Science Publishers.

Füss R. ,Kaiser D. G. & Adams Z. (2007), *Value at Risk, GARCH Modelling and Forecasting of Hedge Fund Return Volatility*, Journal of Derivatives and Hedge Funds, Vol.13 N°1, 2-25.

Gregoriou G. & Gueyie J. (2003), *Risk-Adjusted Performance of Funds of Hedge Funds Using a Modified Sharpe Ratio*, Journal of Wealth Management 6(3), 77-83.

Guidolin M. & Timmermann A.(2005a), *Optimal portfolio choices under regime switching, skew and kurtosis preferences*, Working Paper, Federal Reserve Bank of St Louis, 35 pages.

Guidolin M & Timmermann A. (2005b), *International asset allocation under regime switching, skew and kurtosis preferences*, Working Paper, Federal Reserve Bank of St Louis, 54 pages.

- Gupta A. & Liang B. (2005)**, *Do Hedge Funds Have Enough Capital? A Value at Risk Approach*, Journal of Financial Economics 77, 219-253.
- Heston S. L. (1993)**, *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Review of Financial Studies, Vol. 6, pp. 327-343.
- Hulley H. & Mcwaler T. A.(2008)**, *Quadratic Hedging of Basis Risk*, Quantitative Finance Research Centre, Research Paper 225.
- Jackworth J. C. (2000)**, *Recovering Risk Aversion from Option Prices and Realized Returns*, The Review of Financial Studies, Vol. 13, pp. 433-451.
- Jackworth J. C. & Rubinstein M. (1996)**, *Recovering Probability Distributions from option Prices*, Journal of Finance, Vol. 51, pp. 1611-1631.
- Jarrow, R & A. Rudd (1982)**, *Approximate valuation for arbitrary stochastic processes*, Journal of Financial Economics, Vol. 10, pp. 349-369.
- Jia R. & Dyer J.S. (1996)**, *A standard measure of risk and risk-value models*, Management Science, vol. 42 (12), 1691-1705.
- Johannes S. & Poulsen R. (2008)**, *The Long and Short of Static Hedging with Frictions*, Wilmott Magazine, Issue 38, pp.62-67.
- Jondeau. E & Rockinger. M (1997)**, *'Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis*, Mathematical Finance, 4, 223-245.
- Jondeau E. & Rockinger M. (2000)**, *Reading the smile : the message conveyed by methods which infer risk neutral densities*, Journal of International Money and Finance, Vol. 19, pp. 885-915.
- Jondeau E. & Rockinger M. (2003)**, *How higher moments affect the allocation of asset*, Finance Letters 1 (2), 1-5.
- Jondeau E. & Rockinger M. (2005)**, *Conditional asset allocation under non-normality : How costly is the Mean-Variance criterion*, Working Paper, HEC Lausanne, 42 pages.
- Jondeau E. & Rockinger M. (2006)**, *Optimal portfolio allocation under higher moments*, Journal of the European Financial Management Association 12, 29-67.

- Jondeau E. ,Rockinger M. & Ser-Huang P. (2007)**, *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*, book, Library of Congress Control Number : 2006923899.
- Kabanov Y. M. & Safarian M. M. (1997)**, *On Leland's strategy of option pricing with transactions costs* , Finance and Stochastics, pp.239-250.
- Kellezi E. & Gilli M. (2000)**, *Extreme Value Theory for Tail-Related Risk Measures*, Working Paper, University of Geneva, Geneva.
- Kendall A. (1977)**, *The advanced theory of statistics*, Charles Griffin, London.
- Kimball M. (1993)**, *Standard risk aversion*, Econometrica 61 (3), 589-611.
- Levy H. & Kroll Y. (1978)**, *Ordering Uncertain Options with Borrowing and Lending*, Journal of Finance, 553-574.
- Liang B. (1999)**, *On the performance of hedge funds*, Financial Analysts Journal 55, 72-85.
- Luce R. D. (1980)**, *Several possible measure of risk*, Theory and decision, N°12, 217-228.
- Madan D. B. & Milne F. (1994)**, *Contingent claims valued and hedged by pricing and investing in a basis*, Mathematical Finance, Vol. 4, N. pp. 223-245.
- Madan, D. B. & Milne F. (2002)**, *Extracting Information from Option Markets : Smiles, State-Price Densities and Risk-Aversion*, European Financial Management, Vol. 8, N. 4, pp. 495-513.
- Maillet B. & Jurczenko E. (2006)**, *Theoretical Foundations of Higher Moments when Pricing Assets*, Multi-moment Asset Allocation and Pricing Models 1-36.
- Malz A. M. (1997)**, *Estimating the probability distribution of the future exchange rate from options prices*, Journal of Derivatives, pp. 18-36.
- Markowitz H. M.,(1952)**, *The utility of wealth*, journal Political Economy, 60, 151-158.
- Markowitz H. M.,(1959)**, *Portfolio selection, efficient diversification of investment*, New Haven, CT, Yale university Press.

- Melik W. R. & Thomas C. P. (1997)**, *Recovering an asset's implied PDF from options prices : an applications to crude oil during the Gulf crisis*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 32, pp. 91-116.
- Merton R. C (1973)**, *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science, Vol.4, pp.141-183.
- Nakamura H. (2007)**, *Testing The Structural Stability of A Risk Aversion Parameter in the Foreign Oreign Exchange Market*, Journal compilation of the Japanese Economic Association, Vol. 47 Issue 3, pp. 286-296.
- Nishiyama Y. (2007)**, *Are Banks Risk-Averse ?*, Eastern Economic Association, vol. 33(4), pp. 471-490.
- Panigirtzoglou N. & Skiadapoulos G. (2004)**, *A new approach to modelling the dynamics of implied distribution : Theory and Evidence from the S&P 500 Options*, Journal of Banking and Finance, Vol. 28, pp. 1499-1520.
- Pérignon C. & Villa C. (2002)**, *Extracting information from options markets : Smiles, state-price densities and risk aversion*, European Financial Management Vol. 8, pp. 495-513.
- Ranaldo A. & Favre L. (2005)**, *How to Price Hedge Funds : From Two- to Four-Moment CAPM*, Working Paper, UBS Global Asset Management.
- Rosenberg J. & Engle R. (1997)**, *Option Hedging Using Empirical Pricing Kernels*, Working paper, New York University.
- Rubinstein M. (1994)**, *Implied binomial trees*, Journal of Finance, Journal of Finance", Vol. 49, pp. 771-818.
- Sarin R. K. (1987)**, *Some extensions of luce's measures of risk*, Theory and decision, N°22, 25-141.
- Scott R. & Horvath P., (1980)**, *On the Direction of Reference for Moments of Higher Order than the Variance*, Journal of Finance 35(4), 915-919.
- Selmi F.(2003)**, *Options et couverture des risques extrêmes*, Thèse, Université Paris II.

Sherrick B. J., Garcia P. & Tirupattur V. (1996), *Recovering probabilities information from option markets : tests of distributional assumptions*, Journal of Futures Markets, Vol. 16, pp. 545-560.

Shimko D. C. (1993), *Bounds of probability*, Risk, Vol. 6, pp. 33-37.

Silverman B. W. (1986), *Density Estimation for Statistics and Data Analysis*, Monographs on Statistics and Applied Probability, London : Chapman and Hall.

Szpiro G. (1986), *Measuring Risk Aversion : An Alternative Approach*, Review of Economics and Statistics, Vol. 68, pp. 156-159.

Tarashev. N, Tsatsaronis. K and Karampatos. D (1994), *Investors' attitude towards risk : what can we learn from options ?*, BIS Quarterly Review, pp. 57-65.

Résumé

L'approche traditionnelle des produits dérivés consiste, sous certaines hypothèses bien définies, à construire des stratégies de couverture à risque strictement nul. Cependant, dans le cas général ces stratégies de couverture "parfaites" n'existent pas, et la théorie doit plutôt s'appuyer sur une idée de minimisation du risque. Dans ce cas, la couverture optimale dépend de la quantité du risque à minimiser. Dans le cadre des options, on considère dans ce travail une nouvelle mesure du risque via l'approche de l'utilité espérée qui tient compte, à la fois, du moment d'ordre quatre, qui est plus sensible aux grandes fluctuations que la variance, et de l'aversion au risque de l'émetteur d'une option vis-à-vis au risque. Comparée à la couverture en delta, à l'optimisation de la variance et l'optimisation du moment d'ordre quatre, la stratégie de couverture, via l'approche de l'utilité espérée, permet de diminuer la sensibilité de la couverture par rapport au cours du sous-jacent. Ceci est de nature à réduire les coûts des transactions associées.

Mots-clés : Aversion au risque, Densité neutre au risque, Densité subjective, Fonctions d'utilités, Évaluation des options, Options sur l'indice CAC 40, Stratégie de couverture optimale, Smile de volatilité, VaR, CVaR, EVT, Risque extrême.

Summary

The traditional approach of derivatives involves, under certain clearly defined hypothesis, to construct hedging strategies for strictly zero risk. However, in the general case these *perfect* hedging strategies do not exist, and the theory must be rather based on the idea of risk minimization. In this case, the optimal hedging strategy depends on the amount of risk to be minimized. Under the options approach, we consider here a new measure of risk via the expected utility approach that takes into account both, the moment of order four, which is more sensitive to fluctuations than large variance, and risk aversion of the investor of an option towards risk. Compared to delta hedging, optimization of the variance and maximizing the moment of order four, the hedging strategy, via the expected utility approach, reduces the sensitivity of the hedging approach reported in the underlying asset price. This is likely to reduce the associated transaction costs.

Keywords : Risk aversion, risk neutral density, subjective density, utility functions, options pricing, CAC 40 index options, Optimal hedging strategy, Volatility smile, VaR, CVaR, EVT, extreme risk

